TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE.

IMPRIMERIE DE H. L. PERRONNEAU.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE MÉCANIQUE,

ADOPTÉ DANS L'INSTRUCTION PUBLIQUE;

PAR L. B. FRANCŒUR,

Professeur aux Lycées de Paris, Examinateur des Candidats de l'Ecole Impériale Polytechnique, Membre associé du département de la marine de l'Empereur de Russie, de la Société d'émulation de Cambrai....

QUATRIÈME ÉDITION.

A PARIS,

CHEZ BERNARD, LIBRAIRE DE L'ECOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, QUAI DES AUGUSTINS, N°. 25.

M. DCCC. VII.

« Au milieu de l'infinie variété des phénomènes qui se succèdent « continuellement sur la terre, on est parvenu à démêler le petit « nombre de lois générales que la matière suit dans ses mouve- « mens. Tout leur obéit dans la nature; tout en dérive aussi « nécessairement que le retour des saisons; et la courbe décrite « par l'atôme léger que les vents semblent emporter au hasard, « est réglée d'une manière aussi certaine que les orbes plané- « taires. »

La Place, *Systême du monde*, livre III.

A

P. S. LA PLACE,

CHANCELIER DU SÉNAT,

MEMBRE DE L'INSTITUT IMPÉRIAL

DES SCIENCES ET ARTS,

AUTEUR

DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE,

L. B. FRANCŒUR.

CET Ouvrage est celui que le Gouvernement a adopté pour l'enseignement dans les LYCÉES IMPÉRIAUX, et que les célèbres professeurs de l'ECOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ont placé parmi les livres classiques dont l'étude est ordonnée aux élèves de cette Ecole. Afin de prouver au public ma reconnoissance pour l'accueil favorable qu'il a fait aux trois premières éditions de ce Traité, je l'ai revu avec le plus grand soin; j'ai développé quelques passages difficiles ou obscurs; j'ai fait disparoître des incorrections, et j'ai ajouté diverses théories importantes qui manquoient à l'ouvrage, ce qui l'a augmenté d'environ trois feuilles. Aussi je puis affirmer qu'il n'est aucune partie qui n'ait été, ou corrigée dans ses détails, ou tout-à-fait changée. M. Poisson, instituteur à l'Ecole Impériale Polytechnique, a bien voulu me prêter ses secours obligeans dans cette réforme.

C'est sans doute un désavantage que chaque édition éprouve des variations qui rendent inutiles les éditions précédentes : mais on est amplement dédommagé de cet inconvénient, lorsque le livre sur-tout est d'un prix modéré et invariable, par la facilité de l'étude et la perfection des théories. Maintenant, ce Traité a reçu la forme qu'il paroît devoir conserver, et j'ai la certitude que, si on est suffisamment préparé sur l'analyse géométrique, différentielle et intégrale, on pourra le comprendre aisément, et se livrer à l'étude des *Mécaniques céleste* et *analytique*; but que j'ai eu sur-tout en vue dans la composition de ce Traité.

J'ai évité l'emploi des méthodes synthétiques, qui, dans les choses compliquées, sont ordinairement confuses, et qui d'ailleurs ne sont point d'accord avec l'esprit d'invention et le langage de la Mécanique transcendante. Par les mêmes raisons, je n'ai jamais énoncé les théorêmes avant leur démonstration. Quant aux proportions, je ne les ai jamais écrites sous la forme reçue, $A : B :: C : D$; mais sous celle qui lui équivaut $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Sans m'arrêter à développer les avantages de ce changement, il me suffit de faire remarquer qu'il est inutile d'avoir deux manières de représenter les idées, et qu'on doit préférer celle qui se prête à toutes leurs combinaisons : cette dernière propriété appartient essentiellement aux équations.

Les ouvrages les plus répandus et les plus estimés sont ceux où j'ai renvoyé, lorsque j'ai supposé quelque théorie connue : je terminerai en les indiquant.

Mécanique céleste, de La Place.
Exposition du Système du monde, Idem.
Mécanique analytique, de Lagrange.
Analyse géométrique, de Monge.
Calcul différentiel et intégral, de Lacroix, 2e. édit., et les autres ouvrages de ce géomètre.
Architecture hydraulique, de Prony.
Mécanique philosophique, Idem.
Principes de l'équilibre et du mouvement, de Carnot.
Géométrie analytique, de Biot, 2e. édit.
Astronomie physique, Idem.
Physique mécanique de Fischer, traduite par Biot.
Physique de Haüy.
Géométrie de Legendre.
Géodésie de Puissant.
etc........

TABLE DES MATIÈRES.

CHAP. II. *Des fluides incompressibles et pesans.*

CHAP. III. *Fluides pesans de densité variable.*

LIV. IV. HYDRODYNAMIQUE.

Fin de la Table.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE.

1. On dit qu'un CORPS est *solide*, lorsqu'il est composé * de parties ou molécules adhérentes les unes aux autres, c'est-à-dire qu'on ne peut séparer sans effort. Les métaux, les pierres, etc. sont autant de corps solides. On appelle *fluide* toute substance composée de molécules peu adhérentes, et susceptible d'obéir au plus léger effort : l'eau, l'air, etc. sont des fluides.

2. L'ESPACE est une étendue considérée comme sans * bornes, immobile et pénétrable à la matière. C'est à cet espace, réel ou idéal, qu'on rapporte, par la pensée, la position des corps. Le MOUVEMENT est l'état d'un corps qui ne demeure pas constamment dans un même lieu, c'est-à-dire qui n'est pas toujours à la même distance des divers points fixes de l'espace : cet état est opposé à celui du REPOS.

Ainsi concevons dans l'espace trois plans fixes ; si on a * déterminé la position d'un point par ses distances à ces plans, on dit que ce point est en mouvement, lorsqu'il ne conserve pas ces distances, et que dans deux instans successifs quelconques, les perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois plans fixes changent de grandeur.

* 3. Un point en repos ne peut se donner aucun mouvement, puisqu'il ne renferme pas en soi de raison pour se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. La cause qui change l'état d'un corps, en le faisant passer ainsi du repos au mouvement, est ce qu'on appelle FORCE ou PUISSANCE. Nous rencontrons à chaque instant l'occasion de remarquer cette action singulière; les attractions, les chocs, la chute des corps produite par la pesanteur, les corps qui sont entraînés par le courant d'un fleuve, l'atôme léger emporté par les vents, et le boulet chassé du canon par la poudre enflammée en sont autant d'exemples.

* Il n'est guère d'efforts qu'on n'ait tentés pour découvrir la nature des forces : mais ils ont tous été inutiles, et nous ignorons complettement la cause de cette modification singulière, en vertu de laquelle la matière devient animée. Mais heureusement les principes de la mécanique ne sont nullement intéressés à cette découverte, et nous pouvons y renoncer sans regrets. Les forces ne nous importent que par les mouvemens qu'elles sont capables de produire; leurs effets et les lois de leur action sont les seules choses que la mécanique envisage et calcule.

* 4. La LOI D'INERTIE est le fondement de la mécanique; cette loi consiste en ce que *tous les corps, soit en repos, soit en mouvement, doivent être considérés comme persévérant dans l'état où ils sont.* Nous venons de dire qu'un corps en repos doit y rester si aucune force n'agit sur lui; mais s'il est sollicité par une force qui l'abandonne ensuite à lui-même (ce qu'on exprime en disant qu'il n'est mu que par un *Choc* ou une *Impulsion*), il est d'abord clair que le mouvement aura lieu dans la droite suivant laquelle s'exerce l'action de la puissance; car il n'y a aucune raison pour que ce corps s'écarte plutôt à droite qu'à gauche de cette ligne, qu'on nomme la *Direction*

de la puissance. De plus, on peut voir que ce corps se retrouvera toujours dans les mêmes circonstances que lorsque la force l'a animé; et voici comment Laplace rend raison de ce phénomène. (*Syst. du Monde*, pag. 138.)

« La nature de la force motrice étant inconnue, il est « impossible de savoir *à priori* si cette force doit se con- « server sans cesse. A la vérité, un corps étant incapable « de se donner aucun mouvement, il paroît également « incapable d'altérer celui qu'il a reçu; de sorte que la « loi d'inertie est au moins la plus naturelle et la plus « simple qu'on puisse imaginer. Elle est d'ailleurs con- « firmée par l'expérience : en effet, nous observons sur « la terre que les mouvemens se perpétuent plus longtems « à mesure que les obstacles qui s'y opposent viennent à « diminuer, ce qui nous porte à croire que sans ces « obstacles ils dureroient toujours. Mais l'inertie de la « matière est principalement remarquable dans les mou- « vemens célestes, qui, depuis un grand nombre de « siècles, n'ont pas éprouvé d'altération sensible. Ainsi « nous regarderons l'inertie comme une loi de la nature; « et lorsque nous observerons de l'altération dans le mou- « vement d'un corps, nous supposerons qu'elle est due « à l'action d'une cause étrangère. » (*Voyez* aussi les *Mélanges de Turin*, tom. II, pag. 308.)

5. Lorsque les forces qui agissent sur un système n'y produisent pas le mouvement, on exprime cet état de repos en disant que le système est en *Equilibre*. C'est visiblement ce qui a lieu quand deux forces égales et opposées agissent sur un point matériel. Comme il convient de procéder dans l'étude, du simple au composé, et que les questions de mouvement peuvent être ramenées à celles moins compliquées de l'équilibre, on doit traiter d'abord ces dernières. Tel est le but de la

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

I. *Propositions générales.*

* 8. LA STATIQUE est la science de l'équilibre ; elle est indépendante de la notion du tems.

* Il est évident qu'*on peut, sans altérer l'état d'un systême, y introduire ou en supprimer des forces en équilibre entre elles.*

* Lorsque des puissances ne se font pas équilibre, il est clair qu'en introduisant de nouvelles forces dans le systême, on peut le réduire au repos : les forces égales et opposées à celles-ci sont appelées *Résultantes* ; les puissances du systême en sont les *Composantes.*

* Le problême de la *Composition des forces* consiste à trouver la résultante d'un systême donné de puissances ;
Fig. 1. celui de la décomposition des forces en est l'inverse. Soient deux forces P et Q sollicitant une molécule A ; par le premier problême on cherche leur résultante R, c'est-à-dire la force égale et opposée à celle R' qui les réduit à l'équilibre ; par le second, au contraire, on cherche deux forces P et Q dont la résultante soit R.

9. Il faut d'abord observer que, d'après cette définition, * on doit regarder la résultante de plusieurs forces comme destinée à produire le même effet qu'elles auroient produit par leur action simultanée, et par conséquent à les remplacer : de sorte que la direction de la résultante est celle du mouvement, lorsque le mobile est un point matériel. En effet, soient P, Q, R... des forces en équilibre, et X la * résultante de P et Q : on ne changera rien au système Fig. 11. en y introduisant cette résultante X, et la force X' égale et opposée (8). Mais par hypothèse P, Q et X' sont en équilibre; donc, en les supprimant, il reste X, R..... également en équilibre. De même si les forces P, Q, R... ne se détruisent pas, le même raisonnement prouve que la force qui leur fait équilibre le fait aussi à X, R.... Donc *on peut, sans changer la résultante ou l'état d'un système, substituer à plusieurs forces leur résultante.*

10. *Deux forces agissant suivant la même ligne et* * *dans le même sens, ont une résultante égale à leur somme.* Il est clair que ce principe ne seroit sujet à contestation qu'autant qu'on voudroit désigner que l'effet produit par la résultante est la somme des effets dont les composantes sont capables. Or c'est ce que nous ne voulons pas dire par notre principe; car quoique ce fait soit vrai, ainsi qu'on le verra plus tard (146), il est susceptible de démonstration, et pourroit même ne pas avoir lieu; mais il seroit déplacé de traiter ici cet objet, puisqu'en statique on ne considère point l'effet des forces. On ne doit regarder ce théorême que comme la définition du mot *Somme*, considéré comme applicable aux forces. Ainsi nous disons d'une force qu'elle est double, triple...... d'une autre, lorsqu'elle est capable de faire équilibre à deux, à trois.... forces qui

agiroient dans le même sens et seroient égales à cette dernière (*).

* 11. Il est facile de concevoir maintenant comment on introduit les intensités des puissances dans le calcul : car comme les forces sont des choses d'une même espèce, en en prenant une quelconque pour unité, l'expression de toute force n'est plus qu'un rapport, ou une quantité mathématique, qui peut être représenté par des nombres ou par des lignes. Ainsi lorsque nous dirons qu'une
Fig. 1. force P est représentée par la ligne AB, il faudra concevoir que cette ligne est la direction même de la puissance, et que la longueur AB contient l'unité linéaire AE, autant de fois que la force P contient l'unité de force S, c'est-à-dire qu'on a $\frac{P}{S} = \frac{AB}{AE}$. Nous pouvons donc dire que $P = AB$, puisque S est l'unité de force, et que AE est l'unité linéaire.

* Pareillement lorsqu'on considère deux forces P et Q,
Fig. 1. et qu'on veut les représenter par des lignes, il suffit de

(*) Il me semble que cette manière de présenter les principes de la mécanique et d'introduire la mesure des forces dans la statique est à l'abri de toute objection. On ne peut, par exemple, élever celle de M. Carnot dans son traité des *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement.* Ce savant géomètre s'exprime ainsi dans sa préface, pag. xij : « Qu'est-ce que le « rapport de deux causes différentes ? Ces causes sont-elles la « volonté ou la constitution physique de l'homme ou de l'animal « qui, par son action, fait naître le mouvement ? Mais qu'est-ce « qu'une volonté double ou triple d'une autre volonté, ou une « constitution physique capable d'un effet double ou triple d'un « autre ? La notion du rapport des forces entre elles considérées « comme causes n'est donc pas plus claire que celle de ces « forces elles-mêmes. »

prendre ces droites suivant les directions mêmes des forces, et de déterminer sur ces lignes deux parties AB et AC qui soient entre elles dans le même rapport que ces forces, de sorte qu'on ait $\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AC}$.

Comme il est indifférent de faire entrer les forces dans le calcul en les représentant par des nombres ou par des lignes, nous préférerons dans la suite le premier moyen; car en regardant les forces comme des nombres abstraits, on fait une chose plus conforme au génie de l'algèbre, qui veut que toutes les grandeurs soient rapportées à une unité, et ne soient plus traitées que d'une manière purement abstraite. En représentant au contraire les forces par des lignes, on traite la théorie sous une forme plutôt géométrique qu'algébrique. Ainsi donc on ne devra pas oublier, dans le petit nombre de cas où les forces seront représentées par des lignes, que ce procédé graphique n'est nullement nécessaire, et qu'on ne l'emploie que pour énoncer certains résultats sous la forme qui leur est consacrée.

12. Le problême de la composition des forces, lorsqu'elles ont même direction, est renfermé dans ce qu'on a dit (10); car en considérant les forces deux à deux, il est facile d'en conclure que *plusieurs forces qui agissent suivant une même droite, équivalent à une seule égale à leur somme, si elles agissent toutes dans le même sens; ou égale à l'excès de la somme de celles qui agissent dans un sens, sur la somme de celles qui agissent en sens opposé.* Cet énoncé peut être simplifié par une considération particulière : car si on regarde les forces qui agissent dans un même sens comme positives, et celles qui agissent en sens opposé comme négatives, on pourra dire que *la résultante de plusieurs forces qui agissent*

suivant la même droite est égale à leur somme, en prenant ici le mot *Somme* dans le sens qu'on lui attribue en algèbre.

Fig. 11. Lorsque les composantes ont des directions différentes, comme les forces P, Q, R.... (fig. 11), il est plus difficile d'obtenir leur résultante. Nous allons avant tout poser quelques principes qui serviront à cette recherche.

* 13. *Dans tout systême de forme invariable, on peut prendre pour point d'application de chaque puissance, l'un quelconque de ceux de sa direction.* Car si en un point de la direction d'une force P on applique deux forces qui lui soient égales et qui soient opposées entre elles (8), comme les distances du systême sont invariables, l'une de ces forces détruira la puissance P (5); la seconde restera seule et ne sera autre chose que la force P transportée en un autre point de sa direction, point qui d'ailleurs est quelconque.

* Il suit de là que lorsqu'un obstacle fixe est placé sur la direction d'une force, elle la détruit, puisqu'on peut la supposer appliquée à l'obstacle même.

* 14. Soient deux forces P et Q quelconques; comme

Fig. 1. Q ne tend qu'à faire passer le point mobile A en-dessous de AB, et que de même P élève ce point en dessus de AC, il devra, comme on voit, se mouvoir dans l'angle PAQ; donc (9) *cet angle contiendra la direction de la résultante.*

* Soit AR la direction de la résultante R de deux forces

Fig. 3. quelconques P et Q; si Q croit et devient $Q+q$, on composera d'abord Q avec P, et ensuite (9) leur résultante R avec q : et comme la nouvelle résultante S doit être située dans l'angle RAQ, on voit que *lorsque l'une des deux forces croît seule, la résultante fait avec elle un angle moindre.*

15. *La résultante de deux forces est située dans leur plan*; car il n'y a pas de raison pour que le point mobile qu'elles sollicitent s'écarte plutôt en dessus qu'en dessous de ce plan (9). Le même raisonnement prouve que *si les deux forces sont égales, leur résultante divise l'angle qu'elles forment entre elles en deux parties égales.* *

II. *Parallélogramme des forces.*

16. Occupons-nous de la recherche de la résultante de deux forces P et Q, et d'abord de sa direction. Pour cela, regardons Q comme composée de deux autres forces q et q' (10), de sorte que $Q = q' + q$. Composons avec P la partie q' de Q; et soit AR la direction inconnue de leur résultante R. Prenons sur AP un point quelconque D; formons le parallélogramme CD, et regardons-en les points A, B, C, comme liés entre eux par des verges AB, AC, BC, et soumis à l'action de nos forces q et R, que nous pouvons considérer (13) comme agissant, l'une en C suivant CH, l'autre en B suivant BR. Décomposons la force R en deux autres suivant BG et BF; nous reproduirons visiblement nos deux composantes, l'une q' suivant BK, l'autre P suivant BF; celle-ci peut être appliquée en C, et composée avec celle q qui agit en CQ; prenant CG pour la direction de leur résultante S, les deux forces P et Q auront même résultante que S et q'; ainsi le point de concours G est sur sa direction. Or HG parallèle à AD, montre que cette résultante est dirigée suivant la diagonale AG du parallélogramme $AHGD$, dont l'un des côtés AD est arbitraire; de sorte qu'il suffit de trouver l'autre côté AH. * Fig. 4.

A cet effet, remarquons que si Q est double de P, en prenant $q' = q = P$, AR et CS doivent diviser en deux parties égales (15) les angles CAD, HCB : ainsi CD et HB sont des rhombes; donc $AC = AD = CB = HC$, * et le côté AH est double de AD. De même si Q est triple de P, en prenant $q' = 2P$ et $q = P$; dans le parallélogramme CD, AC sera double de AD; et comme HB sera encore un rhombe, on aura AH triple de AD. Si $Q = 4P$, on fera $q' = 3P$, $q = P$, et par conséquent $AC = 3 \times AD$; d'où $AH = 4 \times AD$. En général si $Q = nP$, on a $AH = n \times AD$.

* Mais si $P = n\alpha$ et $Q = 2\alpha$, on fera $q = q' = \alpha$; le parallélogramme CD, d'après ce qu'on vient de dire, devra avoir $AD = n.AC$; de même HC sera $= AC$: ainsi on aura $AH = 2AC$, d'où $\frac{AH}{AD} = \frac{2}{n} = \frac{Q}{P}$. Si $P = n\alpha$ et $Q = 3\alpha$, on fera $q' = 2\alpha$ et $q = \alpha$: la longueur AC devra satisfaire à la condition ci-dessus $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{n}$; on aura aussi $\frac{CH}{AD} = \frac{1}{n}$; donc en ajoutant, $\frac{AH}{AD} = \frac{3}{n} = \frac{Q}{P}$. Si $P = n\alpha$ et $Q = 4\alpha$, on fera $q' = 3\alpha$ et $q = \alpha$... et ainsi de suite. De sorte que si $P = n\alpha$ et $Q = m\alpha$, on aura $\frac{AH}{AD} = \frac{m}{n} = \frac{Q}{P}$.

* Ainsi on prendra en général sur les directions des forces P et Q des parties AD, AH qui leur soient proportionnelles, on achèvera le parallélogramme HD; la diagonale AG sera la direction de la résultante cherchée (*).

Fig. 5. Si les forces P et Q étoient incommensurables entre elles, ce théorème auroit également lieu; car soit, s'il est possible, AO cette résultante. Prenons entre O et G un point I tel que AD et DI soient commensurables. Le parallélogramme DK auroit la diagonale AI pour la

(*) Cette démonstration est de M. Duchayla, no. 4 de la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*.

direction de la résultante de deux forces dont l'une seroit P et l'autre moindre que Q; ce qui est absurde (14).

17. Quant à l'intensité de la résultante, pour la trouver, appliquons sur le prolongement AK de la diagonale AG une force S égale à la résultante R; les puissances P, Q et S seront en équilibre. Mais on peut regarder cet état comme produit par la force Q entre les puissances P et S; d'où il suit que AH doit être le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur des lignes proportionnelles à P et à S. Si donc on forme sur AD le parallélogramme DK, les longueurs AD et AK seront entre elles comme les forces P et S. Or $DI = AG = AK$; donc AD, AH et AG sont proportionnelles aux forces P, Q et R, ou $\frac{P}{AD} = \frac{Q}{AH} = \frac{R}{AG}$. * Fig. 6.

En rapprochant ce théorême du précédent, on voit que *la résultante de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur des longueurs proportionnelles à ces forces et prises sur leurs directions.* *

18. Il suit de là divers corollaires importans. *

I. La proposition ci-dessus $\frac{P}{AD} = \frac{Q}{AH} = \frac{R}{AG}$ * peut être mise sous une autre forme, en remplaçant les trois côtés du triangle ADG par les sinus des angles opposés DGA, DAG et ADG, ou RAQ, RAP et PAQ. Soient donc représentés par θ, ε et α les angles formés respectivement par R avec P et Q, et par celles-ci entre elles, nous aurons Fig. 10.

$$\frac{P}{\sin \varepsilon} = \frac{Q}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Donc *trois forces qui sont en équilibre, ou deux composantes et leur résultante, sont telles, que chacune* *est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres, et peut être remplacée par ce sinus.*

★ II. La direction de la résultante de deux forces ne dépend que de leur rapport, de sorte que si on fait varier ces forces proportionnellement, on ne changera nullement cette direction. On voit de plus que si les composantes P et Q deviennent mP, mQ, leur résultante R devient mR, quel que soit m. Donc trois forces en équilibre y demeureront lorsqu'on les fera varier proportionnellement. Ce qui sera dit (20), prouvera que ces théorêmes ont encore lieu pour un nombre quelconque de forces qui concourent en un point.

★ III. Le probléme de la composition de deux forces ou de la décomposition d'une force en deux autres, est réduit à la formation d'un parallélogramme dont on connoît certaines parties.

★ IV. Si les forces P et Q sont égales entre elles, le
Fig. 7. parallélogramme devient un rhombe $HADG$, et les diagonales HD et AG sont perpendiculaires; en désignant par α le demi-angle formé par les forces, on a $AE = AD \cos\alpha$, d'où $AG = 2AD\cos\alpha$; or AG et AD sont proportionnels à R et P; donc

$$R = 2P\cos\alpha.$$

★ V. Si les directions des forces P et Q sont à angle droit,
Fig. 8. le triangle rectangle ADG donne $\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{GD}^2$, $AD = AG\cos\theta$, $DG = AG\sin\theta$, en désignant par θ l'angle que les forces P et R forment entre elles. Remplaçons AG, AD et DG par les quantités R, P et Q qui leur sont proportionnelles, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = P^2 + Q^2 \\ P = R\cos\theta,\ Q = R\sin\theta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Ces trois équations, qui n'équivalent qu'à deux distinctes, servent à déterminer la grandeur et la direction de la résultante, c'est-à-dire, R et θ. De plus, ces équations servent encore à la résolution d'une foule de problêmes, car il suffit de connoître deux des quatre quantités P, Q, R et θ, ou même deux relations quelconques entre elles, pour assigner les valeurs des deux autres. On tire de ces équations la suivante, qui peut être utile.

$$Q = P \tang \theta.$$

Nous aurons recours perpétuellement dans la suite aux expressions (A), car elles servent à changer les forces d'un systême en d'autres qui soient rectangulaires. En effet, pour décomposer une force R en deux autres de directions rectangulaires et connues, il suffit de recourir aux équations $P = R \cos \theta$, $Q = R \sin \theta$, qui font voir que *chaque composante est le produit de la force* R *par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec cette composante.*

On pourroit, il est vrai, employer pour cette décomposition, le parallélogramme des forces (18, III) : mais on doit regarder ce théorême plutôt comme une construction graphique propre à peindre aux yeux le résultat et à l'énoncer d'une manière commode, que comme offrant un procédé d'une application facile. Nos formules (A) y sont bien plus propres, puisqu'elles sont conformes à l'esprit algébrique, qui n'admet pas la nécessité de représenter les forces par des lignes (11). C'est pourquoi à l'avenir nous préférerons recourir à ces formules; car comme on peut presque toujours ramener les directions des forces à être perpendiculaires, on évite le désavantage qu'offrent ces équations de ne pouvoir être employées que lorsque les puissances sont rectangulaires. Mais lorsqu'on ne peut facilement user de ce moyen, on doit recourir aux équations données par l'art. (18, I).

19. Comme le parallélogramme des forces sert de fondement à toute la mécanique, nous avons cru devoir considérer ce théorême d'une manière purement analytique; ce qui nous a déterminés à reproduire ici la démonstration que nous avions déja donnée dans notre première édition.

Fig. 9. *Premier cas, les forces étant égales.* Soient P et Q deux forces égales, la ligne Az qui divise l'angle $PAQ = 2\theta$ en deux parties égales (15) est la direction de la résultante z : cette résultante est d'ailleurs déterminée par θ et P, elle varie avec ces quantités; donc $z = f(P, \theta)$. Concevons dans les mêmes directions deux autres forces égales p et q, leur résultante y sera telle que $y = f(p, \theta)$, en désignant par f la même fonction, de sorte que $f(P, \theta)$ devienne $f(p, \theta)$, en changeant simplement P en p. Comme θ est constant, nous aurons seulement $z = fP$, $y = fp$.

Cela posé, si les forces P et p, Q et q agissent ensemble, on aura pour leur résultante $f(p + P)$; mais elle est aussi $y + z$; donc $fp + fP = f(p + P)$: développons, par le théorême de Taylor, et nous aurons

$$fP = P.f'p + \frac{P^2}{2}.f''p + \text{etc.}$$

$f'p$, $f''p$... désignant des fonctions de p, qui, d'après la notation de Lagrange, sont les coefficiens différentiels successifs de fp. Le second membre de cette équation identique doit être indépendant de p, car elle établiroit une relation entre P et p, ce qui est contraire aux hypothèses : donc $f'p$, $f''p$.... sont indépendans de p, ou constans. Mais $f'p = a$ donne $f''p$.... nuls, ainsi $fP = z = aP$: ce qui veut dire que la résultante z varie proportionnellement aux composantes, lorsque l'angle θ est constant. Comme a dépend de ι, nous avons donc

$$z = P.\varphi\theta.$$

Pour trouver $\varphi\theta$, décomposons la force P en deux autres x et y dirigées suivant les deux lignes Ax et Ay qui font avec AP deux angles quelconques égaux à ι : il est clair qu'on a de même $P = x.\varphi\iota$; disons-en autant pour Q. Nous avons donc quatre forces égales à x, qui ont la même résultante z que P et Q, et qui font avec Az des angles égaux à $\theta + \iota$ et $\theta - \iota$; x et x' ont pour résultante $x.\varphi(\theta + \iota)$; celle de y et y' est $x.\varphi(\theta - \iota)$: donc

$$P.\varphi\theta = x.\varphi\iota.\varphi\theta = x.\varphi(\theta + \iota) + x.\varphi(\theta - \iota);$$

(*Ce qui suit est de M.* POISSON).

Développant, on a

$$\varphi\iota = 2\left\{1 + \frac{\iota^2}{2}\cdot\frac{\varphi''\theta}{\varphi\theta} + \frac{\iota^4}{2.3.4}\cdot\frac{\varphi^{\text{IV}}\theta}{\varphi\theta} + \text{etc.}\right\}$$

On peut voir, comme ci-dessus, que puisque θ n'entre pas dans le premier membre, $\frac{\varphi''\theta}{\varphi\theta}$, $\frac{\varphi^{\text{IV}}\theta}{\varphi\theta}\ldots$ sont indépendans de θ, c'est-à-dire, constans: ainsi $\varphi''\theta = a.\varphi\theta$; d'où, en différentiant, $\varphi^{\text{IV}}\theta = a.\varphi''\theta = a^2.\varphi\theta\ldots$ et ainsi de suite. Donc

$$\varphi\iota = 2\left\{1 + \frac{a\iota^2}{2} + \frac{a^2\iota^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right\}$$

Or il est clair que ce développement est celui du cosinus de l'arc $\iota\sqrt{-a}$: donc $\varphi\iota = 2\cos(\iota\sqrt{-a})$, et comme a est une constante indéterminée, nous remplacerons $\sqrt{-a}$ par b, et nous aurons

$$z = 2P\cos(b\theta).$$

Pour déterminer la constante b, attribuons aux forces des directions telles que $\theta = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b}$, π désignant la demi-circonférence dont le rayon est un : nous aurons $P = 2z\cos(\frac{1}{2}\pi)$ ou $z = 0$; or on sait que la résultante n'est nulle que quand les forces sont opposées; ainsi θ est un cadran, ou $\frac{1}{2}\pi$: donc $b = 1$, et on a

$$z = 2P\cos\theta.$$

Deuxième cas. Les forces étant à angle droit. Soient
Fig. 8. P et Q les forces, et AR la direction de leur résultante. Menons IK tel que l'angle $DAI = PAR = \theta$; KAQ sera aussi égal à QAR et complément de θ. Cela posé, on pourra remplacer la force P par deux autres dirigées suivant AI et AR; l'équation précédente donne pour la valeur de ces composantes $\frac{P}{2\cos\theta}$; de même celles de la force Q seront $\frac{Q}{2\sin\theta}$. Les forces P et Q seront donc remplacées par quatre autres, dont deux opposées devront se détruire pour que AR soit la résultante; les deux autres s'ajoutent (10). Donc on a d'un côté $P\sin\theta = Q\cos\theta$, ou $Q = P\tang\theta$; et de l'autre $P = R\cos\theta$, $Q = R\sin\theta$.

Or si on prend sur AP et AQ des parties AD et AH proportionnelles à P et Q, en achevant le rectangle $AHGD$, on obtient dans le triangle AGD, $DG = AD\tang\theta'$, $AD = AG\cos\theta'$, en désignant par θ' l'angle formé par la diagonale AG et le côté. La première de ces équations devient $Q = P\tang\theta'$; donc $\theta = \theta'$; la seconde donne $P = AG\cos\theta$, d'où $R = AG$. Ce qui prouve que la résultante est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du rectangle.

Troisième cas. Les forces étant quelconques. Soient encore P et Q les forces faisant entre elles l'angle α, et AR leur résultante formant avec ces forces les angles θ et ε. Décomposons la force Q en deux autres dirigées suivant AK et AP à angle droit; elles seront $Q \sin \alpha$ et $Q \cos \alpha$. Par là on doit composer les deux forces rectangulaires $Q \sin \alpha$ et $P + Q \cos \alpha$. L'équation $Q = R \sin \theta$ trouvée ci-dessus devient ici $Q \sin \alpha = R \sin \theta$. Or on peut visiblement y changer Q en P, et θ en ε: donc on a $\frac{P}{\sin \varepsilon} = \frac{Q}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \alpha}$; ce qui reproduit le théorême (18, I). Fig. 10.

Du reste en prenant AH et AD proportionnels à P et Q, il est visible que si on forme le rectangle KL sur AH, et si on fait $DI = AL$, la diagonale AG du rectangle KI représentera la résultante des deux forces rectangulaires qui remplacent P et Q: mais $HADG$ est un parallélogramme; donc la résultante cherchée est représentée par cette diagonale; ce qui reproduit le théorême (17).

III. *Des forces qui concourent en un même point.*

20. Pour déterminer la résultante de tant de forces qu'on voudra, quand elles concourent en un même point, on se servira du théorême précédent; on composera ensemble deux de ces forces, et on leur substituera leur résultante (9); on combinera de même celle-ci avec l'une des autres forces, et ainsi de suite. A chaque opération on aura une force de moins dans le systême, et par là on réduira toutes les forces à une seule, qui sera nulle dans le cas d'équilibre. La même considération sert à trouver la résultante lorsque les forces sont dans le même plan et

ne concourent pas en un même point; il suffit alors de les prolonger deux à deux jusqu'en leur point de rencontre.

On peut donc faire la construction suivante : soient les
Fig. 11. forces P, Q, S, T représentées par AB, AC, AD, AE: en formant le parallélogramme $ABFC$, on aura la diagonale AF pour la résultante X de P et Q. De même AG sera la résultante de X et de S : enfin AH sera la résultante du système. Ainsi on établira l'équilibre (8) dans ce système en y introduisant une force égale et directement opposée à AH.

* On peut simplifier cette construction. Par l'extré-
Fig. 11 bis. mité B de la droite AB qui représente la force P, menez la droite BF parallèle à la force Q et égale à la partie AC qui la représente : de même par le point F, menez la droite FG égale et parallèle à la force S; puis par le point G, GH égale et parallèle à la force T, vous formerez par là le polygone $ABFGH$: la droite AH qui ferme ce polygone représente la résultante cherchée; et si, par la construction, le polygone se trouvoit fermé, alors l'équilibre existeroit dans le système. Cette construction a encore lieu lorsque les forces ne sont pas disposées dans le même plan, mais alors le polygone n'est point plan.

Ce procédé n'est propre qu'à peindre les résultats, et ne les fait point trouver d'une manière aussi exacte que le calcul, c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

21. Nous n'avons jusqu'ici composé que des forces
Fig 12. disposées dans le même plan : soient maintenant trois forces P, Q, S, non dans le même plan, et dont, pour plus de simplicité, nous supposerons les directions rectangulaires, c'est-à-dire, P et S à angle droit et Q perpendiculaire à leur plan. Les forces P et S ont leur résultante T déterminée par les équations (A), $P = T\cos\theta$,

$S = T \sin \theta$, où θ désigne l'angle formé par T et P. De même les forces Q et T ont leur résultante R donnée par les équations $R \sin \gamma = T$, $R \cos \gamma = Q$, γ étant l'angle formé par R et Q. Mettant $R \sin \gamma$ pour T dans les deux premières équations, on trouve

$$P = R \cos \theta \sin \gamma, \quad S = R \sin \theta \sin \gamma, \quad Q = R \cos \gamma.$$

La somme des carrés de ces équations donne

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2;$$

ensuite on trouve aisément les valeurs de θ et γ qui complettent la solution du problême.

Il est plus commode d'employer les angles α, β et γ, que forme la direction de la résultante R avec les forces respectives P, S et Q: or on sait (*) que

$$\cos \theta \sin \gamma = \cos \alpha, \quad \text{et} \quad \sin \theta \sin \gamma = \cos \beta.$$

(*) Voyez à cet égard les Leçons de *Monge* et le Traité de *Biot*. Au reste voici une démonstration de ces formules. Soit dans l'espace une ligne AR rapportée à trois axes rectangulaires AS, AP et AQ : on prend sur AR un point quelconque I duquel on abaisse sur ces droites et sur le plan PAC des perpendiculaires qui forment ainsi quatre triangles rectangles. On a donc Fig. 13.

$$AB = AI \cos \alpha, \quad AC = AI \cos \beta, \quad AD = AI \cos \gamma.$$

D'ailleurs les triangles rectangles AIH, ABH et ACH donnent

$$AH = AI \sin \gamma, \quad AB = AH \cos \theta, \quad AC = AH \sin \theta.$$

Les deux dernières équations reviennent à $AB = AI \cos \theta \sin \gamma$ et $AC = AI \sin \theta \sin \gamma$; donc en comparant aux trois premières

$$\cos \alpha = \cos \theta \sin \gamma, \quad \cos \beta = \sin \theta \sin \gamma,$$

ce sont les équations employées ci-dessus; elles conduisent à une relation remarquable; car la somme de leurs carrés est

Donc au lieu des équations précédentes, on a

$$P = R\cos\alpha,\quad S = R\cos\beta,\quad Q = R\cos\gamma,$$

d'où on tire aisément α, β et γ. Ce résultat pouvoit être prévu, puisqu'on connoissoit $Q = R\cos\gamma$, et que les deux autres équations doivent être de même forme.

* Les équations précédentes donnent aussi la solution du problême inverse, qui consiste à décomposer une force R en trois autres forces P, S et Q dirigées suivant trois droites rectangulaires données AP, AS et AQ; en effet, ces équations déterminent P, S et Q en fonctions des quantités connues.

* 22. Les calculs que nous venons de faire peuvent être rendus sensibles par des constructions; car représentons les forces P, S et Q par AB, AC et AD: la résultante T des deux forces P et S est représentée par AH; on peut donc substituer la force T à P et S: mais si on achève le parallélipipède $ADIH$, la diagonale DI est parallèle à AH, puisque DI et AH sont les intersections de deux plans parallèles LM et BC par un même plan, qui est celui des deux parallèles AD et HI. Si on compose ensemble les deux forces représentées par AD et AH, on aura donc pour la résultante des trois forces P, Q et S, une force R représentée par AI. On conclut

Fig. 13.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2\gamma$; et comme $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$, on en conclut

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Elle exprime une condition à laquelle doivent satisfaire les trois angles α, β et γ qu'une droite forme avec trois axes rectangulaires; de sorte que deux de ces angles déterminent la droite, ce qui est d'ailleurs évident.

de là que *trois forces représentées par les trois arêtes qui forment l'un des angles trièdres d'un parallélipipède, ont leur résultante représentée par la diagonale de ce parallélipipède.*

On voit par là qu'on peut décomposer une force en trois autres dirigées suivant trois droites données qui concourent en un des points de sa direction. Si on a, par exemple, les trois droites AP, AQ et AS, et la force représentée par AI, on achèvera le parallélipipède; pour cela on mènera en I les trois plans HM, LM et LH respectivement parallèles à ceux des droites données. Ces plans les couperont en trois points B, C et D qui détermineront les parties AD, AB, AC, qui représenteront les composantes cherchées. *

On retrouve ici le théorême du n°. précédent. Car, par exemple, dans le triangle ADI, rectangle en D, on a $AD = AI \times \cos DAI$; etc.... *

23. Composons analytiquement un nombre quelconque de puissances, et prenons d'abord *le cas où les forces agissent dans un même plan.* Menons par un point quelconque A pris dans ce plan, deux axes Ax et Ay perpendiculaires entre eux; puis décomposons chaque puissance en deux autres parallèles à ces lignes. Par exemple, soit P' l'une de ces forces, en menant MD et MC parallèles aux axes, elle équivaudra à deux autres forces agissant suivant ces lignes, et dont les valeurs, données par l'équation (A) sont $P' \times \cos P'MD$ et $P' \times \cos P'MC$. On en dira autant de toute autre force P''.... * Fig. 14.

Soient donc des puissances.... P', P''....... *
dont les directions font avec Ax
des angles...................... α', α''.......
les composantes parallèles à Ax sont $P'.\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$...
et celles parallèles à Ay sont.... $P' \sin\alpha'$, $P''\sin\alpha''$...

or les premières équivalent à une force unique X égale à leur somme (12); de même les autres ont leur résultante Y égale à leur somme; il n'y a donc plus à considérer que deux forces rectangulaires

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.}$$
$$Y = P' \sin \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.}$$

Soit R la résultante du système, et α l'angle inconnu que sa direction fait avec Ax; d'après l'équation (A), ses composantes sont $R \cos \alpha$ et $R \sin \alpha$. Donc on a

$$R \cos \alpha = X, \quad R \sin \alpha = Y \ldots\ldots\ldots (B).$$

Pour trouver R et α, lorsque X et Y sont donnés, ajoutons les carrés de ces deux équations; comme $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, on en déduit

$$R = \sqrt{\{X^2 + Y^2\}} \ldots\ldots (C).$$

Les équations (B) donnent en outre

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{Y}{R}, \quad \text{tang}\, \alpha = \frac{Y}{X} \ldots (D).$$

Ces équations servent à faire connoître la grandeur et la direction de la résultante : et il est facile (*Voy.* pag. 18) de voir qu'elles expriment que R est la diagonale du rectangle construit sur X et Y, ce qui est conforme à ce qu'on connoît d'ailleurs.

* Toute droite qui passe par le point dont les coordonnées sont x' et y', et qui fait avec l'axe des x un angle α, a en général pour équation

$$y - y' = \text{tang}\, \alpha . (x - x').$$

(*Appl. de l'alg. à la géom.* de Lacroix, 66; *Traité des courbes du second degré* de Biot, 15). On a donc pour équation de la direction de la résultante, en désignant par

x' et y' les coordonnées du point d'application des forces,

$$X(y - y') = Y(x - x') \ldots\ldots\ldots (E).$$

Si le système est en équilibre, il est clair que cet état doit exister en particulier entre les composantes parallèles à chaque axe, puisque sans cela le système auroit une résultante; les équations qui expriment l'équilibre sont donc

$$\left.\begin{array}{l} X = 0, \text{ ou } P'.\cos\alpha' + P''.\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0 \\ Y = 0, \text{ ou } P'.\sin\alpha' + P''.\sin\alpha'' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (F).$$

24. Prenons maintenant *le cas où les puissances ont dans l'espace des directions quelconques.* Concevons par un point arbitraire dans l'espace trois droites AS, AP, AQ, rectangulaires entre elles; nommons *AP l'axe des* x, *AS l'axe des* y, et enfin *AQ l'axe des* z. Le plan PAS passant par les axes des y et des x, sera *le plan des* xy; de même le plan SAQ, qui passe par les axes des y et des z, sera le plan des yz; enfin le plan PAQ sera celui des xz. Pour fixer les idées, on peut supposer que les axes des x et des y sont horisontaux, et que l'axe des z est vertical; le plan des xy sera alors horisontal, et les deux autres *plans coordonnés* seront verticaux. Nous conserverons dans la suite ces dénominations. Fig. 12.

Cela posé, soient des puissances.... P', P'', P'''.... dont les directions forment,

avec l'axe des x, les angles .... α', α'', α'''....
avec l'axe des y .... β', β'', β'''....
avec l'axe des z .... γ', γ'', γ'''....

En décomposant chacune de ces forces en trois autres (21), dont les directions soient parallèles aux axes, on a pour les composantes parallèles

$$\begin{array}{l}\text{aux } x\ldots.\ P'\cos\alpha',\ P''\cos\alpha'',\ P'''\cos\alpha'''\ldots.\\ \text{aux } y\ldots.\ P'\cos\beta',\ P''\cos\beta'',\ P'''\cos\beta'''\ldots.\\ \text{aux } z\ldots.\ P'\cos\gamma',\ P''\cos\gamma'',\ P'''\cos\gamma'''\ldots.\end{array}$$

Chacun de ces trois groupes de forces équivaut à une puissance unique égale à leur somme, puisque ces composantes sont dirigées dans une même droite. Faisons usage de la notation précédente, et nommons X, Y et Z les trois forces parallèles respectivement aux x, y et z, nous aurons

$$\begin{array}{l}X = P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots.\\ Y = P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \ldots.\\ Z = P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \ldots.\end{array}$$

Soient α, β et γ les angles inconnus que forme la direction de la résultante R avec les trois axes; $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$, seront ses composantes dans le sens des axes; on aura donc

$$R\cos\alpha = X,\ R\cos\beta = Y,\ R\cos\gamma = Z\ldots.\ (G).$$

Pour avoir la résultante et sa direction, ajoutons les carrés de ces équations; nous aurons

$$R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Or on sait que (*) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; donc

$$R = \sqrt{\{X^2 + Y^2 + Z^2\}}$$

d'ailleurs les équations (G) donnent

$$\cos\alpha = \frac{X}{R},\ \cos\beta = \frac{Y}{R},\ \cos\gamma = \frac{Z}{R}\ \Bigg\}\ldots.(H).$$

(*) Consultez la note du n°. 21.

Ces équations déterminent la résultante R et sa direction. On peut observer qu'elles indiquent que la résultante est la diagonale du parallélipipède construit sur X, Y et Z; ce qui est évident.

Soient x', y' et z' les coordonnées du point d'application des forces : les projections (*) de la résultante sur les trois plans coordonnés passeront par celles de ce point; les équations des projections de cette droite seront donc

$$y-y' = a(x-x') \; \ldots\ldots \text{ sur le plan des } xy,$$
$$z-z' = b(x-x') \; \ldots\ldots \text{ sur le plan des } xz,$$
$$b(y-y') = a(z-z') \; \ldots\ldots \text{ sur le plan des } yz,$$

a et b étant les tangentes des angles que forme l'axe des x avec ces projections sur les plans des xy et des xz : ainsi menons par le point A, auquel les forces sont appliquées, Fig. 12.
les lignes AP, AS et AQ, parallèles aux axes des x, des y et des z; la projection de la résultante R sur le plan PAS sera AT, ainsi la tangente a de l'angle $TAP = \theta$

(*) On entend par *projection* d'un point sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan. La projection d'une ligne est la suite des projections de ses divers points : s'il s'agit d'une droite, le système des perpendiculaires forme un plan, dont l'intersection avec le plan de projection est une droite; la projection d'une ligne droite est donc une autre droite déterminée par les projections de deux quelconques de ses points. Ainsi dans la fig. 13, le point I est projetté en H, L et M sur les trois plans BAC, BAD et CAD; de même AH est la projection sur le premier de ces plans de la droite AI, dont AC, AB et AD sont les projections sur les axes AP, AS et AQ. *Voyez* à cet égard les *Leçons* de Monge à l'Ecole normale, le *Complément de géométrie* de Lacroix, et le *Traité des courbes du second degré* de Biot.

se déduit de ce qui a été dit n°. 21, où $\text{tang}\,\theta = \frac{Y}{X} = a$.

On auroit de même $b = \frac{Z}{X}$. Au reste on peut encore obtenir ces valeurs en observant que dans la fig. 13, où AI, AB et AC représentent R, Y et X, on a dans le triangle HAB, $\text{tang}.HAB = \frac{HB}{AB} = \frac{Y}{X}$: donc $a = \frac{Y}{X}$; on trouveroit de même $b = \frac{Z}{X}$. Les équations des projections sont donc

$$\left.\begin{aligned} X(y-y') &= Y(x-x') \\ X(z-z') &= Z(x-x') \\ Z(y-y') &= Y(z-z') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (I)$$

l'une d'elles est comportée par les deux autres.

Si le système est en équilibre, il est clair que cet état doit avoir lieu en particulier entre chacun des groupes de forces parallèles aux axes; ainsi les équations d'équilibre sont

$$X = 0,\; Y = 0,\; Z = 0 \ldots\ldots (J).$$

Tout ce qui a été dit dans le numéro précédent n'est qu'un cas particulier du problême que nous venons de traiter; car si les forces sont dans le plan xy, elles forment des angles droits avec l'axe des z, et on a $\cos\gamma' = 0$, $\cos\gamma'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ d'où $Z = 0$, et $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, ou $\sin\alpha = \cos\beta$. Les équations (H), (I) et (J) deviennent donc (D), (E) et (F).

* 25. Si les deux équations (C) n'avoient pas lieu à-la-fois, il n'y auroit pas équilibre dans le système; si on avoit seulement $X = 0$, on auroit $R.\cos\alpha = 0$, et par conséquent $\cos\alpha = 0$, ou $\alpha = \frac{1}{2}\pi$: donc la résultante

feroit avec l'axe des x un angle droit, et seroit parallèle à l'axe des y; de même si on avoit seulement $Y = o$, la résultante seroit parallèle aux x.

On peut faire le même raisonnement pour les trois équations (H); si on avoit seulement $X = o$, on en concluroit que $\cos \alpha = o$, ce qui désigneroit que la résultante est située dans un plan perpendiculaire à l'axe des x: si on avoit à-la-fois $X = o$, $Y = o$, il seroit de même aisé de voir que la résultante seroit parallèle à l'axe des z.

26. Quant aux signes que doivent avoir les composantes ★ $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$.... dans les équations précédentes, ils dépendent de la direction et du sens dans lequel chaque force agit : pour les déterminer, il suffira d'observer ce qu'on a dit (12); car il est clair qu'ici il faudroit soustraire celles de ces composantes qui agissent dans des sens directement opposés aux autres. Nous pouvons donc conclure de là que *l'on peut regarder comme positives toutes les composantes dans le sens d'un des axes, lorsqu'elles tendent à augmenter la coordonnée du point sollicité par rapport à cet axe, pourvu qu'on prenne négativement les composantes qui tendent à diminuer cette même coordonnée.*

Il y a un autre moyen de déterminer les signes, qui ★ revient au précédent, mais qui paroîtra peut-être plus analytique; voici en quoi il consiste. Concevons que du centre M, auquel les forces sont appliquées, on a décrit Fig. 15. le cercle $BDEF$, et mené les droites EB, DF parallèles aux axes Ax et Ay. En prenant le point B pour origine des arcs, toute droite qui, telle que MP ou MQ, tombe en dessus de EB, fait avec cette ligne un angle dont le sinus est positif; tandis que ce sinus est négatif pour les lignes MS et MT qui tombent en dessous. Pareillement les lignes qui sont à droite de DF, forment avec EB

des angles dont les cosinus sont positifs, tandis que celles qui sont à gauche ont les cosinus négatifs. Si donc on fait tourner une force autour du point M qu'elle tire, il suit de ce qu'on a dit ci-dessus, qu'en passant d'un cadran à l'autre, le signe de l'une de ses composantes devra changer aussi : ce qui revient à dire que les produits $P \sin \alpha$ seront positifs ou négatifs avec $\sin \alpha$, c'est-à-dire suivant que la force P tombera au-dessus ou au-dessous de EB : de même $P \cos \alpha$ sera positif ou négatif suivant que P sera disposé à droite ou à gauche de DF. Mais pour n'avoir ainsi égard qu'aux directions de P', P'', etc., nous supposerons alors que toutes ces forces tirent le point matériel M dans les sens de leurs directions respectives, ou que toutes le poussent : cette hypothèse est permise dans tous les cas, puisque si pour une puissance en particulier il en étoit autrement, il suffiroit de l'appliquer sur son prolongement et en sens opposé. Cette manière de déterminer les signes est réellement beaucoup plus analytique, puisque, conformément aux règles de l'algèbre, lorsqu'un problême est posé en équation, il ne s'agit que de traiter celle-ci d'après des règles connues, et il n'est plus nécessaire de recourir au problême proposé afin d'établir certaines distinctions. On voit que notre procédé nous permet de traiter les produits $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$... à la manière des quantités algébriques, et sans nous embarrasser si elles ont trouvé leur origine dans des forces décomposées. Ainsi nous regarderons à l'avenir le signe des quantités $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$... comme déterminé par celui de $\cos \alpha'$, $\cos \alpha''$.... et les quantités P', P''..... ne seront plus considérées que comme des nombres abstraits.

Quoique nous n'ayons envisagé que le cas où les forces sont dans un plan, il est visible que la conséquence a également lieu lorsque cette condition n'existe pas, puisque les équations qu'on traite dans ce cas ont été déduites d'après le procédé du n°. 21, dans lequel on n'a réellement égard qu'à des forces considérées deux à deux. *Voy.* à ce sujet ce paragraphe.

27. On tire des deux équations (B) une conséquence remarquable. Prenons dans le plan des forces un point arbitraire S, et menons au point d'application M la droite $MS = s$; soit θ l'angle qu'elle forme avec l'axe des x. En multipliant la première des équations (B) par $s.\sin\theta$, et la seconde par $s.\cos\theta$, on a * Fig. 14.

$$Rs.\cos\alpha.\sin\theta = P's.\cos\alpha'\sin\theta + P''s.\cos\alpha''.\sin\theta + \text{etc.}$$
$$Rs.\sin\alpha.\cos\theta = P's.\sin\alpha'\cos\theta + P''s.\sin\alpha''.\cos\theta + \text{etc.}$$

Si on soustrait la première de la seconde, en observant que $\sin(\alpha - \theta) = \sin\alpha.\cos\theta - \sin\theta.\cos\alpha$, on a

$$Rs.\sin(\alpha - \theta) = P's.\sin(\alpha' - \theta) + P''s.\sin(\alpha'' - \theta) + \text{etc.}$$

Cela posé, l'angle $\alpha' - \theta$ sera formé par MS et la direction MP' de la force P' : or si du point S on abaisse Sa perpendiculaire sur MP', on aura dans le triangle SMa, $Sa = s.\sin(\alpha' - \theta)$. On en fera autant pour les autres forces; nommant r, p', p''.... les perpendiculaires abaissées de S sur les directions de R, P', P''... les divers termes de l'équation précédente deviendront Rr, $P'p'$, $P''p''$... et on aura *

$$Rr = P'p' + P''p'' + \text{etc.} \ldots\ldots (K).$$

On est convenu d'appeler MOMENT d'une puissance le produit de sa grandeur par sa distance à un point fixe; ainsi l'équation (K) désigne que *le moment de la résultante est égal à la somme des momens des composantes.* *

28. On doit entendre ici par *somme des momens*, les *

produits $P'p'$, $P''p''$.... chacun pris avec son signe : ce signe ne dépend que de la direction des puissances, c'est-à-dire de p', p''... puisque (26) les forces sont supposées tirer toutes à-la-fois le point matériel M. Or l'équation $r = s \cdot \sin(\alpha - \theta)$ indique, que suivant que $\sin(\alpha - \theta)$ sera positif ou négatif, le moment Rr aura le signe + ou le signe — : il en est de même des autres forces. On conclut de là, et de la manière dont on détermine les signes des sinus, que toute force qui tombe d'un côté de la droite MS a son moment positif, tandis qu'on doit regarder comme négatif, le moment d'une puissance qui est disposée de l'autre côté : en supposant toutefois que toutes les forces tirent le point M; ou, si on veut, qu'elles
Fig. 16. le poussent toutes (26). Les pieds des perpendiculaires, tels que a, b, c,.... sont d'ailleurs tous sur la circonférence d'un cercle décrit sur SM comme diamètre.

* Ainsi $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$ seront négatifs dans la fig. 16,
Fig. 16. et $P^{\text{IV}}p^{\text{IV}}$, $P^{\text{V}}p^{\text{V}}$, $P^{\text{VI}}p^{\text{VI}}$ seront positifs, ou réciproquement. Or observons que si on considère le point S comme fixe, et les droites Sa, Sb.... comme des verges rigides, l'action de chacune des forces sur le point M ne peut être que de le faire tourner autour de S : de plus les momens positifs appartiennent aux forces qui tendent à faire tourner dans un sens, tandis que les momens négatifs sont relatifs aux forces qui tendent à faire tourner en sens contraire : on conclut de là que l'équation (K) peut s'énoncer ainsi : *lorsqu'on a plusieurs forces appliquées à un point matériel, et disposées dans un même plan, le moment de la résultante est égal à l'excès de la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, sur celle des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire, autour de l'origine des momens.* Mais on remarquera que l'idée de *rotation* qui

est introduite ici n'est pas nécessairement liée au principe précédent; le mouvement n'y est que de pure commodité pour déterminer les signes et ne fait pas partie nécessaire de ce principe.

29. L'équation (K) devient *

$$P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0$$

dans le cas de $Rr=0$; c'est-à-dire, 1°. lorsque $R=0$, alors le système est en équilibre; et 2°. lorsque $r=0$, ou que l'origine des momens est prise sur la direction même de la résultante. Ainsi *la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, est égale à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire, 1°. quand il y a équilibre; 2°. lorsque l'origine des momens est prise sur la direction de la résultante.* En général, s'il y avoit quelque force dont la direction passât par l'origine S des momens, son moment seroit nul.

Nous ferons voir dans la suite (36, 39, 42 et 45) que le théorême des momens est une partie importante des équations générales de l'équilibre.

IV. *Des forces parallèles.*

30. Soient deux forces parallèles p et q, agissant dans * le même sens, et appliquées aux deux extrémités E et F Fig. 17. de la ligne EF à laquelle elles sont perpendiculaires : il est clair qu'on ne changera rien à l'état du systême si on y introduit deux nouvelles forces p' et q' égales, opposées et agissant dans la direction de la ligne EF, quelles que soient d'ailleurs les grandeurs de ces forces. On composera les deux forces p et p' en une seule P; de même la force Q remplacera q et q'. La résultante

de p et q sera donc la même que celle des deux forces P et Q, qui concourent au même point A, résultante qu'on sait d'ailleurs trouver (18, V). Il ne s'agit donc, pour résoudre le problême proposé, que d'exprimer par le calcul toutes ces conditions.

* Pour cela, par le point A, menons AO perpendiculaire et BC parallèle à EF; de plus concevons les deux forces P et Q appliquées en A (13), et décomposons la puissance P en deux autres dirigées suivant AB et AO : la première sera p', la seconde sera p, puisque les circonstances de la décomposition de P sont les mêmes en A qu'en E : de même décomposons Q en q' et q, agissant suivant AC et AO. Les deux forces q' et p' égales, par hypothèse, se détruisent : la résultante de p et q est donc $= p + q$; agit suivant AO, c'est-à-dire parallèlement aux composantes.

* Déterminons maintenant le point O par lequel passe cette résultante : puisque P est la résultante des deux forces rectangulaires p et p', il résulte du n°. 18 (A) que la tangente de l'angle PEp' est $= \frac{p}{p'}$; or dans le triangle EAO, on trouve $\frac{AO}{EO}$ pour la valeur de cette tangente; ainsi $\frac{p}{p'} = \frac{AO}{EO}$, d'où $p' = \frac{EO}{AO} \times p$: on trouve de même $q' = \frac{OF}{OA} \times q$. Or $p' = q'$, donc.... $p \times EO = q \times OF$. Ce qui prouve que le point O d'application de la résultante divise la droite EF en parties réciproquement proportionnelles aux composantes : et si les forces p et q étoient égales, le point O seroit placé au milieu de EF.

Soient deux puissances parallèles P et Q, obliques à la ligne d'application EG, et leur résultante R; menons une autre droite quelconque BD perpendiculaire aux forces, et regardons B, D et C comme leurs points d'application; nous aurons $P \times BC = Q \times CD$; et comme EF et FG sont proportionnels à BC et CD, on peut remplacer l'équation précédente par $P \times EF = Q \times FG$; ce qui démontre que le théorème ci-dessus n'exige pas que les forces soient perpendiculaires à la ligne d'application. Donc en général *la résultante de deux forces parallèles est égale à leur somme, leur est parallèle, et divise la droite d'application en deux parties réciproquement proportionnelles aux composantes.* * Fig. 19.

31. Soient deux forces P et Q parallèles, et R leur résultante, appliquées en E, G et F; soient aussi a, p et q les lignes EG, EF et FG, on aura * Fig. 19.

$$a = p + q, \quad R = P + Q, \quad Pp = Qq \ldots\ldots (L).$$

Ces équations renferment six quantités R, P, Q, a, p et q; il suffit donc de connoître trois d'entre elles, pour en conclure aisément les trois autres : on pourroit même n'en connoître que deux; mais alors il faudroit avoir une nouvelle équation pour que le problême fût déterminé; et ainsi de suite. En général, il faut toujours remonter aux équations (L) pour résoudre les problêmes relatifs à l'équilibre des forces parallèles. Nous en allons donner plusieurs exemples.

I. Supposons qu'il s'agisse de trouver les efforts qu'exerce en deux points donnés E et G d'une droite EG, une force R appliquée en F : pour cela il faut trouver deux forces P et Q qui soient parallèles à R, et appliquées en E et G, dont R soit la résultante, c'est-à-dire, qui agissant en sens contraire, fassent équilibre à R. On connoît ici R, p et q; il faut trouver P et Q. Eliminons * Fig. 19.

entre les équations (L), il viendra

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{pR}{a} = \frac{pR}{p+q} \\ P &= \frac{qR}{a} = \frac{qR}{p+q} \end{aligned}\right\} \ldots (M).$$

52. Puisqu'on peut prendre trois quantités pour inconnues, regardons Q, a et q comme telles : nous résoudrons par là ce problème : décomposer une force donnée R en deux autres P et Q, telles que la grandeur de l'une d'elles P, et le point d'application de cette force soient connus : les données du problème sont R, P et p. Éliminant Q, a et q, nous trouverons

$$Q = R - P, \quad q = \frac{Pp}{R-P}, \quad a = \frac{Rp}{R-P}.$$

Il est aisé, d'après cela, de mettre l'équilibre entre deux forces parallèles et opposées P et R : en effet, soit R la plus grande, décomposons cette force en deux autres dont l'une P' soit égale et opposée à P : on aura pour déterminer l'autre composante Q et le point B où elle doit être appliquée, les valeurs ci-dessus. Donc cette force Q équivaut à P et R, et est leur résultante. Une force Q' égale et opposée à Q produiroit l'équilibre. Il suit de là que la résultante de deux forces parallèles qui agissent en sens contraire est égale à la différence des composantes, et agit dans le sens de la plus grande des deux ; le point d'application de cette résultante est placé en dehors des forces et du côté de celle-ci en un point tel que les longueurs a et q sont encore réciproquement proportionnelles aux forces P et R, puisqu'on a $aP = Rq$, d'après les équations (M).

Si les forces R et P étoient égales, on auroit $Q=0$ *
et $a=\infty$: de sorte que pour produire l'équilibre il faudroit appliquer une force nulle à une distance infinie : ce résultat annonce l'impossibilité de décomposer la force R en deux autres dont l'une détruise P; l'infini fait voir dans ce cas que les équations (L) ne peuvent avoir lieu ensemble (*Voy.* l'algèbre de Lacroix, n°. 68). Donc une force unique ne peut alors établir l'équilibre.

III. 33. Proposons-nous de mettre en équilibre deux * forces P et Q qui agissent dans le même sens; E, G Fig. 17. sont les points d'application. Ici P et Q sont seuls connus : les trois quantités p, q et R devront donc être déterminées par les trois équations (L). En éliminant, on trouve, outre $R=P+Q$,

$$p=\frac{aQ}{P+Q}=\frac{aQ}{R},\quad q=\frac{aP}{P+Q}=\frac{aP}{R}.$$

Une fois le point F déterminé, on y mettra un appui fixe ou une force S égale à $P+Q$, dirigée en sens contraire de P et Q, et parallèle à ces composantes.

34. Soient P et Q deux forces parallèles agissant dans * le même sens, et leur résultante R : d'un point quel- Fig. 19. conque A de leur plan pris en dehors des forces, menons la droite AD perpendiculaire à leurs directions, et regardons les points B, C et D comme ceux où ces forces sont appliquées ; faisons $AC=r$, $AB=p$, $AD=q$, comme $AC=BC+AB=AD-DC$, ou $r=BC+p=q-DC$, en multipliant par r l'équation $R=P+Q$, on trouve $Rr=P(BC+p)+Q(q-DC)$, et comme $P\times BC=Q\times DC$, on en conclut

$$Rr=Pp+Qq \ldots\ldots (N).$$

Prenons maintenant le point en A', au-dedans de l'espace *

$PBQD$, et désignons par p, q, r, les distances des forces à ce point : on a $A'C = BC - A'B = A'D - CD$ ou $r = BC - p = q - CD$; multiplions de même par r l'équation $R = P + Q$, nous aurons en réduisant

$$Rr = Qq - Pp.$$

Ainsi le moment de la résultante est égal à la somme dans le premier cas, et à la différence dans le second cas, des momens des composantes.

★ Voyons maintenant ce qui arrive lorsque les forces agissent en sens opposé. Puisque la force S égale et opposée à la résultante R met en équilibre les puissances P et Q, on peut regarder la force Q comme destinée à mettre P et S en équilibre. Ainsi Q est égale et opposée à la résultante Q' des deux forces P et S. Remplaçons Q et R par leurs égales Q' et S dans l'équation (N), il vient $Sr = Q'q \pm Pp$, en cumulant, par le double signe $\pm$, les deux cas où l'origine des momens est prise en dehors des forces P et S, ou entre elles. On tire de là

$$Q'q = Sr \mp Pp;$$

ce qui démontre que le moment de la résultante Q' des deux forces S et P est encore ici égal à la somme ou à la différence des momens des composantes : seulement on prendra le signe $-$ dans le cas où l'origine des momens sera en dehors des forces, et le signe $+$ dans l'autre cas; ce qui est précisément le contraire de ce qu'on a fait ci-dessus.

★ Concluons de là que l'équation (N) est vraie dans tous les cas, et que *le moment de la résultante de deux forces parallèles est égal à la somme des momens des composantes;* mais il faut avoir soin d'attribuer à ces momens des signes conformes à ce qu'on vient de trouver. Or il est facile de voir qu'il suffit pour cela de regarder p et q, aussi bien que P et Q, comme affectées de signes contraires, savoir : les perpendiculaires, lorsque partant de l'origine des momens, elles sont dirigées dans des sens opposés ; et les forces, lorsqu'elles agissent en sens contraire. On peut encore remarquer qu'ici, comme précédemment (28), cette manière de déterminer les signes, équivaut à regarder comme affectés de signes différens les momens des forces qui tendent à faire tourner le système en sens contraires autour de l'origine supposée fixe, et ne pas oublier toutefois que la rotation qu'on introduit ici n'est que de pure commodité.

On observera que tout ce que nous venons de dire pour la ligne AD, menée à angle droit sur les directions des forces, a encore lieu pour toute autre ligne AG, menée d'une manière quelconque ; c'est-à-dire qu'on a aussi

$$R \times AF = P \times AE + Q \times AG.$$

Cela résulte de ce que le théorême du n°. 30 a lieu, quels que soient les angles formés par les forces parallèles avec la ligne sur laquelle sont situés leurs points d'application.

Nous pouvons maintenant résoudre les problêmes II et III, à l'aide du théorême des momens ; en effet, prenons l'origine sur la direction de la résultante, les momens des composantes devront avoir leur somme nulle ; ainsi ces momens devront être égaux, et les composantes tendront à faire tourner dans des sens contraires autour du point d'application de la résultante. Si donc on veut mettre en équilibre deux forces (fig. 18, n°. 32) P et R qui sont dirigées en sens opposé, on aura $Pa = Rq$. Soient de même deux forces P et Q dirigées dans le même dans (fig. 10, 2e [illegible]), on aura, en prenant les moments relativement à un point quelconque, $[illegible] = \frac{Py - Qy}{P - Q}$, équation qui fera connaître le point d'application de leur résultante.

Fig. 4. [illegible] Soit un système quelconque de forces parallèles P', P'', P''', .. appliquées dans l'espace aux divers points d'un corps; désignons par x', y', z', x'', y'', z'', ... les coordonnées respectives de ces points rapportées à trois axes rectangulaires Ax, Ay et Az; soient enfin D et K les points d'application des forces P' et P'', G celui de leur résultante R'; nommons a', b' et c' les trois coordonnées de G. Nous aurons

$$AB = x', \quad BC = y', \quad CD = z',$$
$$AH = x'', \quad HI = y'', \quad IK = z'',$$
$$AE = a', \quad EF = b', \quad FG = c'.$$

On sait que $R' = P' + P''$. Prolongeons la droite DK jusqu'à sa rencontre L avec le plan zy; le théorème des momens donne

$$R' \times LG = P' \times LD + P'' \times LK,$$

et comme les distances LG, LD, LK, sont proportionnelles à leurs projections AE, AB et AH, sur l'axe des x, on peut remplacer les unes par les autres dans notre équation, qui devient par là $R'a' = P'x' + P''x''$. On raisonnera de même par rapport aux axes des y et des z; on a donc

$$R' = P' + P'', \qquad R'b' = P'y' + P''y'',$$
$$R'a' = P'x' + P''x'', \qquad R'c' = P'z' + P''z''.$$

Il suit des développemens donnés dans le numéro précédent sur les signes, que les termes de ces équations ne sont pas essentiellement positifs. On devra examiner, pour fixer ces signes, si l'une des forces P', P'', n'agit pas en sens contraire, et si quelqu'une des coordonnées x', y', z'.... n'est pas négative; puis on combinera ces diverses circonstances. Les facteurs de chaque terme ayant ainsi un signe connu, celui de leur produit s'en suivra. On doit faire la même remarque par la suite. Du reste ces quatre équations font connoître la grandeur de la résultante, le sens dans lequel elle agit et le point où elle est appliquée : c'est ce qui sera bientôt développé plus au long.

Composons maintenant la force R' (qui remplace P' et P'') avec la force P'''; on aura de même

$$R'' = R' + P''', \qquad R''a'' = R'a' + P'''x'''$$
$$R''b'' = R'b' + P'''y''', \quad R''c'' = R'c' + P'''z'''$$

substituant pour R', $R'a'$, $R'b'$, $R'c'$, leurs valeurs, on obtient celles de R'', $R''a''$, $R''b''$, $R''c''$. On peut continuer ce raisonnement autant qu'il est nécessaire, et il est visible que pour déterminer la résultante R et sa position, on aura les équations

$$\left.\begin{array}{l} R = P' + P'' + \text{etc.} \\ Rx = P'x' + P''x'' + \text{etc.} \\ Ry = P'y' + P''y'' + \text{etc.} \\ Rz = P'z' + P''z'' + \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (O).$$

On doit toujours observer de prendre négativement les forces et les coordonnées dirigées en sens contraire de celles qu'on regarde comme positives. La première de ces équations détermine la grandeur de la résultante; son point d'application a pour coordonnées

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Px + P'x' + \text{etc.}}{P + P' + \text{etc.}} \\ y &= \frac{Py + P'y' + \text{etc.}}{P + P' + \text{etc.}} \\ z &= \frac{Pz + P'z' + \text{etc.}}{P + P' + \text{etc.}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (P).$$

56. Observons que les coordonnées x, y et z désignent les distances respectives des plans des yz, xz et xy, aux points d'application des forces; Px, $P'x'$, $P''x''$... sont donc les produits des forces par les distances au plan yz de leurs points d'application; c'est ce qu'on nomme les moments de ces forces par rapport au plan des yz: de même Py, $P'y'$, $P''y''$.... sont leurs moments par rapport au plan des xz. Ainsi *la résultante d'un système de forces parallèles est parallèle à ces forces, est égale à leur somme, son moment est égal à la somme des moments des composantes.* Bien entendu que les signes doivent toujours être déterminés d'après les considérations exposées (54). On ne devra pas confondre par la suite que les moments dont il s'agit [illegible] avec ceux que nous avons déjà employés, puisque ce sont alors des produits de forces par leurs distances à un point pris dans leur plan; tandis que lorsqu'il est question de forces parallèles, on entend par moments les produits de ces forces par les distances à un plan quelconque de leurs points d'application.

Ce théorème sert à faire connaître la grandeur, la direction et la position de la résultante. Si le plan des xy a été pris perpendiculaire aux directions des forces, chacune d'elles est projetée sur ce plan en un point;

les x et les y désignent leurs distances respectives aux plans des yz et des xz, auxquelles elles sont parallèles; il suffit alors de prendre les momens des composantes par rapport à deux plans parallèles, pour en conclure la distance de la résultante à ces plans : ainsi *dans ce cas il ne faut que trois équations*.

Si toutes les forces étoient disposées dans un même plan, qu'on pourroit prendre pour celui des xy, on auroit alors $z' = 0$, $z'' = 0$.... et par conséquent $z = 0$; ainsi la résultante seroit située dans le plan des forces; les équations se réduisent alors à

$$\left.\begin{aligned} R &= P' + P'' + \text{etc.} \\ Rx &= P'x' + P''x'' + \text{etc.} \\ Ry &= P'y' + P''y'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (Q),$$

et on a pour les coordonnées du point d'application

$$x = \frac{P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}}, \; y = \frac{P'y' + P''y'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}} \ldots (R)$$

37. Les équations (P) étant indépendantes des directions des forces, il est évident que le point qui a pour coordonnées x, y, z, doit rester le même, lorsqu'on fait prendre aux forces d'autres directions parallèles, pourvu qu'on ne change pas leurs points d'application. Il s'ensuit que dans tout système de forces parallèles, il existe un point, indépendant de leurs directions communes, *par lequel passe toujours la résultante, lorsqu'on fait tourner les forces sur leur point d'application sans cesser d'être parallèles entre elles*; ce point, dont les valeurs (P) donnent les coordonnées, a été nommé *Centre des forces parallèles*. On observe en outre que ce centre est unique dans le système, et qu'il ne varie pas lorsqu'on fait

varier proportionnellement les forces, et qu'on substitue nP', nP''... à P', P''..., puisque cela revient à multiplier les deux termes de chaque fraction par n.

Lorsque les forces sont disposées dans un même plan, le centre des forces est dans ce plan, et ses coordonnées sont les valeurs (R). Il seroit également facile de voir que lorsque les points d'application des forces sont sur une même droite, le centre des forces est sur cette droite.

* 38. Soit un système de forces parallèles en équilibre; cherchons les équations qui expriment cet état. Composons en une seule puissance R toutes les forces du système excepté une P, ce qui est toujours possible, puisque cette puissance P est quelconque. On aura la grandeur et les coordonnées a, b et c du point d'application de R, en mettant a, b, c, pour x, y, z, dans les équations (O): et en désignant par α et β les angles que forment avec l'axe des z les projections de R sur les plans des xz et xy, on aura pour leurs équations

$$x - a = \operatorname{tang}\alpha\,(z - c), \quad y - b = \operatorname{tang}\beta\,(z - c).$$

Maintenant, pour avoir la résultante totale, il ne s'agiroit plus que de composer en une seule les deux forces P et R. Mais puisqu'il y a équilibre, il faut qu'elles soient égales et dirigées en sens opposés dans la même droite; ainsi d'une part on a $R = -P$, et de l'autre, les coordonnées x, y et z du point d'application de la force P doivent être situées sur la direction de P, et satisfaire aux équations précédentes. Si donc on y substitue pour R, a, b c, leurs valeurs, on obtient

$$\left.\begin{array}{l} P' + P'' + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P'x' + P''x'' + \text{etc.} = \operatorname{tang}\alpha\,(P'z' + P''z'' + \text{etc.}) \\ P'y' + P''y'' + \text{etc.} = \operatorname{tang}\beta\,(P'z' + P''z'' + \text{etc.}) \end{array}\right\}(S).$$

Telles sont les équations d'équilibre des forces parallèles; on a omis ici les termes P, Px, etc., comme étant suffisamment indiqués par la forme même de chaque expression.

V. *Des forces de directions quelconques agissant sur un corps solide.*

39. Considérons d'abord le cas où les forces sont dans un même plan, que nous prendrons pour celui des xy. Soit donc une figure plane solide, sur les divers points de laquelle agissent des forces P', P'',.... situées dans le plan de cette figure; désignons par x', y'; x'', y'';... les coordonnées de ces points, et par α', α''.... les angles que ces puissances forment avec l'axe des x. Si on décompose P' en deux forces parallèles aux axes, on aura X' et Y' pour les composantes; de même X'' et Y'' seront celles de P'', et ainsi de suite : de sorte qu'on trouvera (23)

$$P'\cos\alpha' = X',\qquad P''\cos\alpha'' = X'', \text{ etc.}$$
$$P'\sin\alpha' = Y',\qquad P''\sin\alpha'' = Y'', \text{ etc.}$$

Nous aurons ainsi deux grouppes de forces parallèles aux axes; il sera aisé de composer chacun d'eux en une seule, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent. En désignant par X la résultante des forces parallèles aux x, et par b sa distance à cet axe; par Y et par a la même chose relativement à l'axe des y, on obtient

$$X = X' + X'' + \text{etc.}\qquad Y = Y' + Y'' + \text{etc.}$$
$$Xb = X'y' + X''y'' + \text{etc.}\qquad Ya = Y'x' + Y''x'' + \text{etc.}$$

Il est maintenant aisé de composer les deux forces X et Y en une seule, qui sera d'ailleurs appliquée en leur point de concours, dont les coordonnées sont a et b. Pour faire cette composition, il suffit de remonter aux équations B, C et D du n°. 23, en y regardant X et Y comme connus.

Comme le point d'application de la résultante cherchée R peut être indifféremment l'un quelconque de ceux du corps solide pris sur la direction de cette force, nous allons chercher l'équation de la droite suivant laquelle elle est dirigée. Cette droite passe par le point dont a et b sont les coordonnées, ainsi l'équation est $y-b=\text{tang}\,\alpha\,(x-a)$, ou $\left(\text{à cause de tang}\,\alpha=\frac{Y}{X}\right)$,

$$Xy-Yx=Xb-Ya,$$

et mettant pour le second membre sa valeur,

$$Xy-Yx=X'y'-Y'x'+X''y''-Y''x''+\text{etc.}$$

Ici x et y représentent les coordonnées du point d'application de la résultante. Observons que $X'y'-Y'x'$ est la différence des momens des forces X' et Y' par rapport à l'origine, et on sait (27) qu'elle est égale au moment de leur résultante P' (parce que les forces X' et Y' tendent à faire tourner en sens contraires); il en est de même des autres termes de l'équation. Soient donc p', $p''\ldots r$, les longueurs des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les directions des forces P', $P''\ldots R$, l'équation précédente équivaut à $Rr=P'p'+P''p''+\text{etc.}$ Ainsi on a les trois équations

$$X=X'+X''+\text{etc.},\quad Y=Y'+Y''+\text{etc.},$$
$$Rr=P'p'+P''p''+\text{etc.}$$

On observe que ce résultat n'est autre chose que la réunion des équations (B) et (K), n^{os}. 23 et 27, et que le théorême des momens, qui étoit une conséquence des premières lorsque les forces concouroient en un point unique, entre ici comme une des conditions nécessaires. Les signes de ce théorême doivent d'ailleurs être déterminés de la même manière que lorsque les forces concouroient, puisque les produits $P'p'$, $P''p''$, sont ici introduits comme provenant des forces X', Y', etc. qui concourent deux à deux.

Représentons la somme des momens des forces par Π, et nous aurons

$$R\cos\alpha = X,\ R\sin\alpha = Y,\ Rr = \Pi = Xy - Yx \ldots (T).$$

Les deux premières, traitées comme dans le n°. 25, déterminent la grandeur et la direction de la résultante; et la troisième étant l'équation de cette direction, en détermine la position. D'ailleurs elle fait connoître $r = \frac{\Pi}{R}$, ce qui fournit, si on veut, la construction suivante. Soient Ax et Ay les axes des x et y : on mènera par l'origine la droite Ap égale à r, et faisant avec Ay un angle α, puis on tirera sur Ap la perpendiculaire Rp au point p, ce sera la direction de la résultante. On remarque il est vrai qu'il y a quatre droites R, R', R'', R''' qui satisfont à la condition ci-dessus indiquée; mais les signes de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et $\tang\alpha$ lèveront toute incertitude. Fig. 11.

40. Examinons les conditions d'équilibre du système qui vient de nous occuper. Pour cela, si on en ôte l'une des forces, telle que P, l'équilibre ne subsistera plus, et il sera toujours possible de composer les autres puissances en une seule R, puisque P est quelconque; R sera déterminée de grandeur et de position par les équations (T) : et pour que la force P produise l'équilibre, il faut qu'elle soit égale et directement opposée à la force R. Ainsi $R = -P$, et l'équation $Xy - Yx = \Pi$, doit être aussi celle de la force P. En passant tout dans un seul membre,

et observant que $Xy - Yx$ est $= Rr = - Pp$, on en conclut que les équations d'équilibre sont au nombre de trois, savoir :

$$\left.\begin{array}{r} X' + X'' + \text{etc.} = 0 \\ Y' + Y'' + \text{etc.} = 0 \\ P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0 \\ \text{ou } X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (U).$$

Nous avons omis ici les termes en P, parce que comme ils sont de même forme que les autres, ils sont suffisamment indiqués.

41. L'équilibre pourroit aussi avoir lieu en supposant que le systême est fixé en l'un de ses points, de sorte qu'il ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation autour de ce point : or pour que l'équilibre ait lieu, il n'est plus nécessaire que les forces s'entredétruisent ; il suffit que leur résultante soit dirigée vers ce point, car alors elle sera détruite par la résistance qu'il oppose (13). Pour que la droite suivant laquelle la résultante agit soit dirigée à ce point, il faut que son équation soit satisfaite lorsqu'on mettra pour x et y ses coordonnées. Prenons, si on veut, le point fixe pour origine des coordonnées, alors $x = 0$ et $y = 0$, donnant $\Pi = 0$, il est clair que *pour l'équilibre il suffit que la somme des momens soit nulle par rapport au point fixe*, ou

$$P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots\ldots (V),$$

ainsi on retrouve le théorême du n°. 29.

42. Si l'équilibre n'a point lieu dans le systême libre, on l'établit aisément en introduisant une force dont la grandeur et la position soient déterminées par les conditions que nous avons examinées ; mais si le systême a un de ses points fixe, comme on peut le prendre pour

origine, il suffira d'introduire une force P qui satisfasse à l'équation (F); en désignant par p sa distance au point fixe, on devra donc prendre P et p telles qu'on ait $Pp + P'p' + P''p'' +$ etc. $= 0$. Or cette équation ne fait connoître que l'une des deux quantités P et p; l'autre est entièrement arbitraire, ainsi que la direction de la force P : donc le problème est indéterminé. Dans ce cas on peut exiger que les quantités inconnues satisfassent à certaines conditions, telles que de donner à la pression sur le point fixe une grandeur et une direction déterminées.... etc.

43. Concevons dans l'espace un corps solide dont les divers points sont sollicités par un système de forces quelconques, et assignons à leurs grandeurs et à leurs directions les mêmes dénominations qu'au n°. 24; c'est-à-dire désignons les forces par P', P''..... nommons α', β', γ', les angles formés par la direction de la force P' avec les axes des x, des y et des z; de même α'', β'', γ'', pour la force P'', et ainsi des autres puissances. Mais ici les forces n'étant pas supposées concourir en un même point, la position de chacune doit être en outre déterminée par celle d'un des points de sa direction, tel que son point d'application au système. Soient donc x', y', z'; x'', y'', z''..... les coordonnées des points d'application des forces P', P''....

Décomposons chaque force, au point même où elle est appliquée, en trois autres respectivement parallèles aux x, aux y et aux z; soient X', Y' et Z' les trois composantes de P'; de même soient X'', Y'', Z'' les composantes de P'', etc..... c'est-à-dire faisons

$$P' \cos \alpha' = X';\ P'' \cos \alpha'' = X'';\ \text{etc.}$$
$$P' \cos \beta' = Y';\ P'' \cos \beta'' = Y'';\ \text{etc.}$$
$$P' \cos \gamma' = Z';\ P'' \cos \gamma'' = Z'';\ \text{etc.}$$

Cela posé, concevons qu'on a pris dans le systême [illegible] plan fixe au corps solide et mobile avec lui; prenons [illegible] plan pour celui des xy, prolongeons chaque force ju[squ'à] sa rencontre avec ce plan. Les équations de la [force] suivant laquelle agit la force P' sont:

$$x - x' = a'(z - z'), \quad y - y' = b'(z - z').$$

On verra, comme au n°. 24, équation [illegible], que $a' =$ [illegible]

$$\text{et } b' = \frac{Y'}{Z'}$$

: or pour obtenir le point où la [force] rencontre le plan xy, il faut faire $z = 0$, ce qui d[onne] pour les coordonnées c' et l' de ce point:

$$c' = \frac{Z'x' - X'z'}{Z'}, \quad l' = \frac{Z'y' - Y'z'}{Z'}.$$

En changeant les accens, on a les coordonnées des [points] analogues pour les autres forces. Concevons donc [chaque] puissance appliquée en son point de rencontre [avec] le plan xy, et décomposons-la en deux, l'une située [dans] ce plan et l'autre perpendiculaire à ce plan. Nous a[vons] ainsi deux groupes de forces, les unes placées da[ns le] plan xy, et les autres [illegible] à Z', Z'' .... parc[e que] [illegible] l'équilibre ne peut avoir lieu à [moins] qu'il n'existe séparément dans chaque groupe [illegible] les équations [illegible]

[illegible] Le [illegible] [illegible] les trois cas suivans [illegible] Si chaque groupe est réductible [à] deux forces l'équilibre ne peut avoir lieu.

[illegible] Si l'un des deux groupes, par exemple celui qui est [dans] le plan xy, est réductible à deux forces parallèles, on a [illegible] Q et $-Q$, [illegible] et que l'autre groupe ait un

1°. Les forces parallèles aux z doivent satisfaire aux trois équations (S) ; et comme la force Z' est appliquée au point dont a' et b' sont les coordonnées, on a pour les momens de Z', $Z'a'$ et $Z'b'$, ou $Z'x'-X'z'$ et $Z'y'-Y'z'$. Il en seroit de même des autres forces Z'', etc.; ainsi on a

$$Z' + Z'' + \text{etc.} = 0,$$
$$Z'x' - X'z' + Z''x'' - X''z'' + \text{etc.} = 0,$$
$$Z'y' - Y'z' + Z''y'' - Y''z'' + \text{etc.} = 0.$$

2°. Les forces situées dans le plan xy, doivent satisfaire aux trois équations (U), n°. 40. Pour les appliquer ici, il faut décomposer chaque force en deux autres parallèles aux x et aux y; celles provenues de P' seront visiblement égales à X' et Y'; X'' et Y'' seront de même celles provenues de P'', etc. Ainsi il ne faudra rien changer aux forces qui entrent dans les trois équations (U). On devra ensuite y mettre a' et b' pour x' et y'; a'' et b'' pour x'', et y'', etc.; par là on trouve que la quantité $X'y' - Y'x'$ reste telle qu'elle est : ainsi les trois équations (U) sont encore vraies ici sous les mêmes formes.

On a donc, pour exprimer l'état d'équilibre d'un corps

---

sultante unique Z; soient P et R les forces Q et $-Q$, et D le point où Z rencontre le plan xy. Menons une droite quelconque BD, et décomposons la force Z en deux autres S et T parallèles et appliquées aux points B et C où cette droite BC rencontre P et R: composons S et P, puis T et R: il n'y aura pas équilibre entre les deux résultantes, puisqu'elles seront situées dans des plans parallèles. Fig. 18.

3°. Enfin si chaque groupe n'est réductible qu'à deux forces, Q et $-Q$, Z et $-Z$; après avoir décomposé comme ci-dessus Z en S et T, on en fera autant pour $-Z$: on aura six forces situées dans deux plans parallèles; or on pourra toujours composer chacun de ces groupes de trois forces en une seule, ainsi on retombera dans le même cas.

solide libre, les six équations

$$\left.\begin{array}{l} X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0 \\ Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0 \\ Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots (X).$$

$$\left.\begin{array}{l} X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + \text{etc.} = 0 \\ X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + \text{etc.} = 0 \\ Z'y' - Y'z' + Z''y'' - Y''z'' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots (Y).$$

Les trois équations (X) sont celles (J) n°. 23, qu'on a obtenues lorsque les forces concouroient; ainsi *il faut qu'en supposant les forces transportées parallèlement pour les appliquer en un même point, elles soient encore en équilibre.* Mais ces équations qui suffisoient pour exprimer l'équilibre ne suffisent plus ici, et il faut en outre trois autres équations. X' et Y' sont les composantes de P' parallèles au plan xy, et $X'y' - Y'x'$ est la différence des momens de ces forces par rapport aux deux autres plans coordonnés. Ainsi la première des équations (Y) indique que la somme des momens des composantes parallèles aux x, est égale à la somme des momens de celles parallèles aux y. Les deux autres équations sont des expressions analogues par rapport aux autres axes. On voit donc que les trois équations (Y) indiquent que, *lorsqu'on a décomposé chaque force en trois autres parallèles aux axes, il faut que les sommes respectives des momens des forces qui composent deux de ces groupes soient égales entre elles* : les momens étant d'ailleurs pris par rapport aux deux plans coordonnés parallèles aux composantes (*Voy.* n°. 36) qui passent par l'axe perpendiculaire aux forces qu'on considère. Ainsi si on prend les forces parallèles aux z et aux x, les momens devront être pris par rapport aux plans des yz et xy, qui passent par l'axe des y.

44. La démonstration que nous venons de donner suppose qu'aucune des forces n'est parallèle au plan xy : mais est aisé de l'appliquer à ce cas même : car si P a cette rection, on peut mener, par le point d'application de tte force, une droite quelconque; par exemple, une arallèle aux z, et ajouter au système dans cette direction ux forces P et Q égales et opposées, ce qui n'y change ien. En composant l'une d'elles, telle que Q, avec P' n obtient une force unique S; de sorte que la force P' st ainsi remplacée par deux puissances P et S qui rencontrent le plan xy. Ainsi nos six équations devant avoir ieu, il ne s'agit que d'y mettre pour chaque terme provenant de P', deux termes analogues en P et S. Mais il t clair que cela ne changera rien à ces équations, uisque la décomposition de P et S reproduira les mêmes mposantes que P, Q et P'; ainsi les deux premières nneront des termes qui s'entre-détruiront, et il ne stera que ceux qui viennent de P'.

45. L'équilibre peut exister sans que cependant les rces s'entre-détruisent, car si le système contient un e fixe ou un point fixe, il suffit visiblement que utes les forces qui ne se détruisent pas soient dirigées cet axe ou à ce point, c'est-à-dire qu'il suffit qu'alors s puissances équivalent à d'autres qui remplissent cette ndition.

Si le système est retenu par un axe fixe, que nous endrons pour celui des z, en prolongeant chaque force décomposant comme dans le n°. 43, on voit que les issances parallèles à l'axe fixe sont indifférentes au seul ouvement que le corps puisse prendre, et qu'il est inue de les considérer. Ainsi il suffit que les puissances i agissent dans le plan xy soient en équilibre autour l'origine fixe. Nous avons vu (41) que cette condition entraînoit pour conséquence l'équation (V) ou

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (Z),$$

laquelle n'exige d'ailleurs aucun changement pour être appliquée au cas présent. On en conclut qu'un corps solide est en équilibre autour d'un axe fixe toutes les fois que les deux groupes de composantes qui sont dans des plans perpendiculaires à cet axe ont les sommes de leurs momens égales par rapport à deux plans rectangulaires passant par l'axe.

Si on considère que X' et Y' sont des composantes de P' parallèles aux x et aux y; que d'ailleurs dans le plan qui contient ces composantes (qui est perpendiculaire à l'axe fixe et passe par le point d'application de P'), $X'y'$ et $Y'x'$ sont leurs momens par rapport au point où ce plan coupe l'axe, on voit que $X'y' - Y'x'$ est le produit de la composante de P' dans ce plan par sa distance à l'axe. Bien entendu que ce produit aura le signe de $X'y' - Y'x'$. Ainsi il sera positif pour les forces qui tendent à faire tourner dans un sens, et négatif pour les autres. Le systême d'un corps solide retenu par un axe, est ce qu'on nomme en général un *Levier*, et la distance d'une force à l'axe est son *bras de levier*. On peut donc dire que *pour qu'un levier soit en équilibre, il faut qu'après avoir décomposé chaque puissance en deux, l'une parallele, l'autre dans un plan perpendiculaire à l'axe fixe, la somme des produits de ces dernières composantes par leurs bras de levier soit nulle.*

46. Si le systême est retenu par un point fixe, que nous supposerons à l'origine des coordonnées, la condition précédente a encore visiblement lieu; mais elle ne suffit plus, car les forces parallèles aux z ne sont plus inutiles à considérer : il faut que leur résultante passe aussi

par l'origine. Or on a vu, n°. 43, que a', b'; a'', b''.... désignent les distances de ces forces Z', Z''.... aux plans des yz et des xz : donc les momens de leur résultante (36) sont $Z'a' + Z''a'' +$ etc. et $Z'b' + Z''b'' +$ etc. Ces sommes devront donc être nulles pour que la résultante soit dans ces deux plans. Ainsi, outre la condition du n°. précédent, on a encore deux autres équations. En les mettant sous la forme convenable, on voit que pour *qu'un corps solide soit en équilibre autour de l'origine fixe, il faut que les trois équations* (Y) *aient lieu.* On voit aussi par là que lorsque l'équilibre a lieu autour de trois axes fixes rectangulaires, il auroit lieu aussi par rapport à un autre axe quelconque passant par le même point.

On désigne les équations (X), (Y) par des dénominations tirées de leur nature; ainsi les premières sont nommées *équations de translation*, comme si elles étoient destinées à indiquer que le corps n'est point animé d'un mouvement de translation : on appelle les autres *équations de rotation*, parce qu'elles semblent employées à exprimer que le corps n'éprouve point de rotation.

En rapprochant ce théorême de ce qu'on a vu ci-dessus, on remarque que pour qu'un systême soit en équilibre autour d'un point fixe, il doit remplir les trois conditions auxquelles il seroit assujetti, s'il y avoit trois axes fixes rectangulaires passant par ce point. Si le systême est libre, il faut en outre que si on transporte les forces parallèlement à elles-mêmes pour les appliquer toutes en un même point, l'équilibre ait encore lieu dans cet état.

47. Supposons qu'il n'y ait pas équilibre dans le systême, et que cependant il n'y ait qu'une seule résultante R; c'est-à-dire qu'en y introduisant une force égale et directement opposée à cette résultante, l'équilibre ait

lieu. Soient X, Y et Z les composantes de R, les six équations (X) et (Y) devront donc être satisfaites lorsqu'on y comprendra les trois forces $-X$, $-Y$ et $-Z$. Les trois premières équations, traitées comme à la page 26, conduisent aux valeurs (H) qui déterminent encore ici la grandeur et la direction de la résultante : ainsi il ne s'agit plus que d'employer les trois équations (Y) à la recherche des coordonnées x, y et z de son point d'application.

Pour abréger, faisons

$$L = (X'y' - Y'x') + \text{etc.}$$
$$M = (Z'x' - X'z') + \text{etc.}$$
$$N = (Y'z' - Z'y') + \text{etc.}$$

X, Y, Z, L, M et N représenteront des grandeurs connues, et les équations (Y) donneront

$$Xy - Yx = L, \quad Zx - Xz = M, \quad Yz - Zy = N;$$

ce qui détermine x, y et z. Si on élimine deux de ces quantités, la troisième disparoît d'elle-même : ainsi en multipliant ces équations respectives par Z, Y et X, et ajoutant, on a

$$LZ + MY + NX = 0$$

équation sans laquelle les trois équations précédentes ne peuvent avoir lieu à-la-fois, et qui exprime une condition entre les données du problême pour que les forces soient réductibles à une seule.

Il suit de là qu'*un systéme de forces dans l'espace ne peut en général être mis en équilibre avec une seule force ;* mais que lorsque *l'équation de condition* $LZ + MY + NX = 0$ est satisfaite, il y a en effet une résultante unique qui est connue, car les équations (H), pag. 19, en donnent la grandeur et la direction, et on peut prendre pour son point d'application l'un quelconque de ceux de la droite qui a pour équations $Xy - Yx = L$, etc.

Par exemple, lorsqu'on a un système de forces parallèles, elles font avec les axes les mêmes angles, et $\alpha = \alpha' = \alpha'' =$ etc. On obtient donc

$$L = (P'y' + P''y'' + \text{etc.}) \cos\alpha - (P'x' + P''x'' + \text{etc.}) \cos 6$$

On auroit de même M et N; mais comme d'ailleurs $X = R \cos\alpha$, $Y = R \cos 6$, $Z = R \cos\gamma$, l'équation de condition est satisfaite. Ainsi un système de forces parallèles a toujours une résultante unique, excepté lorsque $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ (*Voy.* n°. 32).

Mais si l'équation de condition n'est pas satisfaite, alors il faudra introduire deux forces pour établir l'équilibre : en effet, concevons en un point quelconque du système une force dont les composantes X, Y et Z soient prises telles que l'équation de condition ait lieu, ce qui peut se faire d'une infinité de manières, alors il n'y aura qu'une résultante qu'on déterminera aisément d'après ce qui vient d'être dit. On connoîtra donc par là les deux forces qui seroient propres à produire l'équilibre. Ainsi *dans un système de forces agissant sur un corps solide, il y a deux résultantes qui ne peuvent en général se composer en une seule.* On vient d'ailleurs de voir qu'il est facile d'assigner ces résultantes, et que le problème est indéterminé.

Si le corps étoit fixé à un point ou à un axe, il faudroit introduire dans le système une force qui satisfît aux trois équations (Y) dans le premier cas, et à l'équation (Z) dans le second. Il est évident que le problème est indéterminé, et qu'on peut disposer des quantités qui servent à assigner la grandeur, la direction et la position de cette force, excepté trois d'entre elles s'il s'agit d'un point fixe, et excepté une s'il s'agit d'un axe. On peut donc exiger de nouvelles relations entre ces indéterminées, telles que de produire une pression qui satisfasse à certaines conditions, etc.... Mais nous ne nous arrêterons point ici pour ne pas nous écarter de notre objet, d'autant que la solution de ces problèmes est implicitement renfermée dans les principes généraux de ce Traité.

VI. *Des pressions sur les points et axes fixes.*

* 48. Pour que la résultante d'un système soit détruite, il faut qu'elle passe par un axe ou un point fixe : mais il est très-important de connoître quelle pression cet axe ou ce point éprouve; car s'il n'est pas capable d'une résistance indéfinie, l'obstacle n'est pas suffisant pour détruire l'action des forces. Or cette PRESSION *est visiblement égale et opposée à la force qui devroit être employée pour produire l'équilibre dans le système, sans le secours de l'axe ou du point fixe*, puisque la réaction est toujours égale à l'action; si donc on cherche la résultante du système, le point où elle est appliquée doit éprouver un effort de même grandeur et de même direction qu'elle. Ainsi, d'après ce qui a été dit précédemment, la recherche de la pression exercée sur un point fixe n'a aucune difficulté, puisqu'elle est réduite à celle de la résultante.

* Quand il s'agit d'un axe fixe, il arrive souvent qu'il est retenu en deux points, qu'on appelle *Tourillons*, dans des *colliers* ou *crapaudines* : alors il est beaucoup moins intéressant de connoître la pression qu'éprouve le point où la résultante rencontre l'axe, que l'effort qui a lieu
Fig. 22. sur les points d'appui. Soient donc EF l'axe fixe; A, B les deux colliers; RM la résultante. Pour trouver la

pression exercée en A et en B, il ne s'agit que de décomposer la force R en deux autres appliquées en ces points. Ce problème a été résolu n°. 31, et les équations (M) en donnent la solution.

Dans ce que nous avons dit n°. 45, lorsqu'il s'agissoit de l'équilibre autour d'un axe fixe, nous avons omis la force qui étoit parallèle à cet axe; mais lorsqu'on veut déterminer les pressions qu'il éprouve, on ne peut se dispenser d'y avoir égard : cherchons donc l'effet que produit sur un axe AB, fixe en A et en B, la force R qui lui est parallèle, et qui en est distante de $AC=BD=r$. Soit $AB=a$, et supposons que la force R agit de C vers D. Appliquons en A deux forces M et Q dans les directions AM et AQ; et au point B, la force S, dirigée suivant BS : déterminons les trois forces M, Q et S de manière à produire l'équilibre dans le système $CABD$, et nous connoîtrons les efforts exercés en A et en B (*). Or si on prend A pour origine, AB pour axe des x, AC pour axe des y, les équations d'équilibre (U) deviennent ici Fig. 13.

$$R-M=0,\quad S-Q=0,\quad Rr-Sa=0.$$

La première de ces valeurs fait voir que le corps est sollicité dans le sens de AB, comme si la puissance R agissoit suivant cette droite même : les deux autres donnent $S=Q=\frac{Rr}{a}$; ainsi la force R tend à faire

(*) Les forces M, Q et S sont disposées aux points fixes A et B de la manière la plus générale que le système puisse comporter. Quant aux sens dans lesquels on dirige les actions de ces forces, ils sont, il est vrai, présupposés; mais si on leur eût donné tout autre direction, le calcul même auroit rectifié les erreurs.

tourner l'axe autour des points A et B, en sens opposés, et avec une action égale.

VII. *De la décomposition des forces.*

49. D'après ce qui a été exposé, on voit qu'il sera toujours possible de déterminer la grandeur, la direction et la position de la résultante d'un système donné de forces : et on peut remarquer que nous avons fait dépendre toute notre théorie de ce principe, *deux forces égales et directement opposées se détruisent.* Le problême inverse est ce qui doit maintenant nous occuper. Ce problême consiste à décomposer au contraire une force donnée en plusieurs autres. Pour le résoudre, il faut supposer que la résultante R est donnée, et qu'il s'agit d'en trouver les composantes : c'est-à-dire qu'il faut regarder comme connu, dans les équations précédemment obtenues, tout ce qui est propre à la résultante, et chercher tout ce qui dépend des composantes : or il est clair que ce problême renferme plus ou moins d'indétermination.

Par exemple, si on veut décomposer une force R en d'autres forces P', P''.... agissant sur le même point, et disposées dans le même plan, il faut trouver les grandeurs et les directions de ces dernières à l'aide des équations (B, 23), c'est-à-dire déterminer P', P''...α' α'', par les équations

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = R \cos \alpha.$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \text{etc.} = R \sin \alpha.$$

Or comme elles ne peuvent faire connoître que deux de ces quantités, on voit qu'on pourra disposer de toutes, excepté de deux d'entre elles.

Pareillement si on vouloit que les composantes fussent appliquées au même point, mais disposées dans l'espace, on emploieroit les équations (G) qui ne déterminent que les sommes X, Y et Z des composantes dans le sens de chaque axe. L'indétermination est ici plus grande quoique le nombre des équations soit plus considérable, parce que celui des inconnues est augmenté.

En général, pour décomposer une force donnée R en d'autres, il faut employer les équations (B), (G), (O), (T) ou (X et Y), suivant les diverses circonstances, et disposer arbitrairement de plusieurs des inconnues, de manière qu'il n'en reste qu'un nombre égal à celui des équations.

CHAPITRE II.

DE LA PESANTEUR ET DU CENTRE DE GRAVITÉ.

I. *Propositions générales.*

50. L'EXPÉRIENCE nous apprend que les corps abandonnés à eux-mêmes éprouvent des efforts dirigés vers le centre de la terre : cette direction se nomme *Verticale*; c'est celle que prend dans le vide, un corps qui n'est retenu par aucun obstacle. On appelle *Plan horisontal* celui qui est perpendiculaire à la verticale. Non-seulement tous les corps sont soumis à cette action, mais leurs parties les plus intimes y sont séparément sujettes : ainsi les portions quelconques d'un corps divisé tombent isolément, si aucun effort ne les arrête; on voit même que chacune de ces parties arrive à la surface de la terre dans le même tems qu'emploieroit le corps entier. Si les choses

nous paroissent se passer différemment, cela tient à la résistance de l'air : sous le récipient de la machine pneumatique, l'or et la plume la plus légère mettent le même tems à descendre. (Voyez la Physique de *Haüy* et de *Fischer.*)

Cette tendance universelle n'est pas essentielle aux corps; c'est un effort réel dont la matière, par elle-même, est incapable; ainsi il est dû à une puissance extérieure à laquelle on a donné le nom de GRAVITÉ ou PESANTEUR. La pesanteur est donc une force dont l'action s'exerce continuellement et séparément sur toutes les molécules de la matière : cette action n'est point comme celle des attractions chimiques, dont l'intensité varie pour les diverses substances; celle de la pesanteur est la même sur toutes les molécules, et quelle que soit la nature des corps sur lesquels elle agit : c'est du moins ce que l'expérience confirme, ainsi que nous aurons occasion d'en parler lorsqu'il sera question du pendule. On donne le nom de POIDS à la résultante de toutes les actions de la gravité sur les diverses molécules d'un corps. On ne doit donc pas confondre la pesanteur avec le poids; puisque la pesanteur est la force qui imprime des impulsions égales aux diverses particules des corps, tandis que le poids est la résultante de toutes ces impulsions.

On appelle MASSE d'un corps la quantité absolue de matière dont il est composé : et il faut bien distinguer la masse d'un corps de son volume, c'est-à-dire de l'espace géométrique renfermé par sa surface; car l'expérience nous a appris que tous les corps sont criblés en tout sens d'une infinité de trous ou *pores*; ils ont donc des quantités de matière bien différentes sous des volumes égaux; c'est ce qui fait que tous les corps n'ont pas le même poids, quoique tous soient sollicités par la même force. Comme la gravité n'exerce son action que sur la partie matérielle des corps, et qu'elle a la même intensité pour tous, il s'ensuit que le *poids est proportionnel à la masse* : d'où l'on voit que le poids dépend de la masse des corps, tandis que la pesanteur en est indépendante.

51. On a nommé DENSITÉ le rapport de la masse au volume; de sorte qu'on dit qu'une substance est plus *dense* qu'une autre, lorsqu'elle a plus de masse sous un volume égal. Si on avoit une substance qui n'eût point de pores, sa densité seroit la plus grande possible, et en lui comparant la densité des autres corps, on auroit la quantité de matière qu'ils renferment; mais ne connoissant point de substances semblables, nous ne pouvons avoir que les densités relatives des corps, c'est-à-dire le rapport de leur densité à celle d'une substance donnée : de sorte que dans l'équation $D = \frac{M}{V}$, où D est la densité, M la masse, et V le volume d'un corps, les quantités D, M et V expriment les rapports à des unités de leur espèce.

Si d, m et v désignent la densité, la masse et le volume d'un autre corps, on aura aussi $d = \frac{m}{v}$; on déduit de là que

1°. Les masses de deux corps sont en raison directe de leurs volumes à densités égales; car $d = D$ donne $\frac{M}{V} = \frac{m}{v}$.

2°. Les masses étant égales, les densités des substances sont en raison inverse des volumes, car $m = M$ donne $DV = dv$.

3°. Les densités de deux corps sont en raison directe de leurs masses, à volumes égaux; car $V = v$ donne $\frac{D}{d} = \frac{M}{m}$.

* On observera qu'*on peut substituer les poids aux masses*, à cause de la proportionnalité; et comme dans les corps *homogènes*, c'est-à-dire de même nature, la densité est constante, on peut substituer aussi les volumes aux masses.

* 52. Lorsque les corps obéissent à l'action de la gravité, les verticales décrites par leurs molécules se joignent au centre de la terre : ainsi ces verticales ne sont pas des lignes parallèles. Mais comme de tous les corps qui sont à notre disposition, il n'en est aucun dont le volume soit assez considérable pour que ses dimensions soient comparables au rayon de la terre, on peut regarder les verticales comme des droites parallèles dans un espace de peu d'étendue. Ainsi les actions de la pesanteur peuvent être considérées comme celles de forces parallèles appliquées aux diverses molécules des corps. Tout ce qui a été dit (30 et suiv.) a donc lieu ici; reprenons les résultats déja obtenus, et appliquons-les à la gravité.

* 1°. Quand il s'agit de la pesanteur, le centre des forces se nomme *Centre de gravité* ou *d'inertie*; ce centre est donc (37) le point par lequel passe la résultante de tous les efforts verticaux, exercés sur chaque molécule par l'action de la pesanteur *quelle que soit la position du corps :* cette résultante est parallèle aux forces, c'est-à-dire verticale, et sa grandeur est ce qui constitue le poids du corps. Elle est égale à l'effort qu'il faut employer pour le soutenir.

* 2°. Quelle que soit la position qu'on donne au corps, cette résultante passera toujours par le centre de gravité, puisque cela équivaut à changer la direction des puissances, sans changer leurs grandeurs et leur parallélisme.

3°. Un corps pesant est en équilibre, si son centre de gravité est soutenu. *

4°. Lorsqu'on veut trouver le centre de gravité d'un système de corps, on peut supposer la masse de chacun d'eux concentrée en son centre de gravité propre, puisque le poids de chaque corps est une force proportionnelle à la masse et qui passe par ce centre : par là, on n'aura plus à considérer qu'un système de points pesans.

5°. Pour trouver le centre de gravité mécaniquement, il suffit de suspendre successivement le corps dans deux positions d'equilibre, à l'aide de fils verticaux appliqués tour-à tour en deux points différens de ce corps; le lieu d'intersection de ces deux fils sera le centre cherché. *

53. Nous disons qu'un corps est *Symétrique* par rapport à un plan, lorsque ses molécules sont deux à deux à la même distance de ce plan. *

Concevons un corps homogène, symétrique par rapport à un plan : si l'on prend deux molécules qui soient à la même distance de ce plan, leurs momens seront égaux et de signes contraires; et on peut en dire autant de toutes les molécules prises deux à deux. (Voyez les notes pages 69 et 71.) Ainsi la résultante du système sera dans ce plan (36), et par conséquent le centre de gravité y sera aussi : donc *le centre de gravité de tout corps homogène, symétrique par rapport à un plan, est situé dans ce plan.* *

Nous dirons d'un corps qu'il est symétrique par rapport à un axe, lorsqu'il le sera relativement à deux plans quelconques qu'on feroit passer par cet axe. *Le centre de gravité de tout corps homogène, symétrique par rapport à un axe, est situé sur cet axe*, puisqu'il doit se trouver dans chacun de ces deux plans. Le mot de *symétrique* n'est employé que pour exprimer d'une manière abrégée que la somme des momens est nulle. Si donc un corps * est symétrique par rapport à deux axes, le centre de gravité est à leur intersection, qui est ce qu'on nomme le *Centre de figure* : ainsi celui d'une droite est en son milieu, celui d'un cercle, d'une circonférence, d'un polygone régulier, etc. est au centre; celui d'un cylindre est au milieu de son axe; etc.

54. Nous avons vu que les valeurs (*P* page 42) déterminent la position du centre des forces parallèles, en donnant les trois coordonnées de ce point. Faisons-leur prendre la forme convenable pour qu'elles donnent celles du centre de gravité. Les forces P', P''.... etc. sont ici les actions que la pesanteur exerce sur chaque molécule, actions proportionnelles aux masses sur lesquelles elles agissent, d'après ce qu'on a vu (50). Soient m', m''... les masses des molécules sollicitées par la pesanteur; x', y' et z' les trois coordonnées de m'; x'', y'', z'' celles de m'', etc. on a $P' = gm'$, $P'' = gm''$, etc. Les valeurs (*P*) donnent donc pour les coordonnées X, Y et Z du centre de gravité

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{m'x' + m''x'' + \text{etc.}}{m' + m'' + \text{etc.}} \\ Y &= \frac{m'y' + m''y'' + \text{etc.}}{m' + m'' + \text{etc.}} \\ Z &= \frac{m'z' + m''z'' + \text{etc.}}{m' + m'' + \text{etc.}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A').$$

Ces résultats sont indépendans de la force avec laquelle la gravité exerce son action. C'est cette raison qui a engagé Euler à préférer le nom de *Centre d'inertie* à celui de centre de gravité.

On peut écrire ces formules d'une manière concentrée qui est fort commode. On observe que le numérateur de la valeur de X, est une somme de termes de même forme que mx, en affectant le premier terme d'un accent, le second de deux, etc. .... On remplace $m'x' + m''x'' +$ etc. par $\Sigma.(mx)$; pareillement $m'y' + m''y'' +$ etc. par $\Sigma.(my)$, $m'z' + m''z'' +$ etc. par $\Sigma.(mz)$, et enfin $m' + m'' +$ etc. ou la masse entière du système, par $\Sigma.(m)$. Par là, on a pour les coordonnées du centre de gravité les formules

$$X = \frac{\Sigma.(mx)}{\Sigma.(m)}, \quad Y = \frac{\Sigma.(my)}{\Sigma.(m)}, \quad Z = \frac{\Sigma.(mz)}{\Sigma.(m)} \ldots\ldots (B'),$$

équations dans lesquelles le caractère Σ indique une somme de termes de même forme, ou une intégrale finie, lorsque le nombre des points est lui-même fini; et une véritable intégrale de quantités infinitésimales, lorsque le nombre des points est infini. C'est ce qui sera bientôt éclairci.

55. Il arrive quelquefois qu'on prend dans un système le centre de gravité pour origine des coordonnées; alors on a $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; on conclut de là que

$$\left.\begin{aligned} m'x' + m''x'' + \text{etc.} &= 0 \text{ ou } \Sigma.(mx) = 0 \\ m'y' + m''y'' + \text{etc.} &= 0 \text{ ou } \Sigma.(my) = 0 \\ m'z' + m''z'' + \text{etc.} &= 0 \text{ ou } \Sigma.(mz) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (C').$$

Si le centre de gravité étoit dans le plan yz, la première de ces équations auroit seule lieu; s'il étoit dans l'axe des z, on auroit à-la-fois les deux premières.

56. Les équations (B', A') servent à faire connoître les trois coordonnées du centre de gravité d'un système de points, ou d'un corps continu, et par conséquent la distance de ce centre aux plans respectifs des yz, des xz et des xy. On peut remarquer que ces équations sont conformes au théorême des momens (36); car la première, par exemple, équivaut à $(m' + m'' +$ etc.$) \times X = m'x' + m''x'' +$ etc. Or, $(m' + m'' +$ etc.$) \times X$ est le moment par rapport au plan yz, du corps entier considéré comme concentré en son centre de gravité; $m'x'$, $m''x''$, etc. sont les momens

des molécules par rapport au même plan. Donc *pour avoir la distance du centre de gravité d'un corps à un plan, il faut multiplier un de ses élémens par sa distance à ce plan, et intégrer dans toute l'étendue du corps; on aura la somme des momens de ces élémens : il faudra ensuite diviser par la masse entière du corps.*

On observera que si le système est homogène, on pourra remplacer les masses par leurs volumes, puisqu'elles leur sont proportionnelles (51); et que s'il est composé de molécules réunies dans un même plan, il suffira de prendre les momens par rapport à des axes tracés dans ce plan.

II. *Des centres de gravité des corps terminés par des droites ou des plans.*

* 57. *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone rectiligne quelconque.*

* Supposons le poids de chacun des côtés du polygone *ABCDE* concentré en son centre de gravité qui est en son milieu G', G''.... et cherchons la résultante, soit par le principe de la composition des forces (30), soit par celui des momens (56).

Fig. 24.

* 1°. Si on se sert de la théorie de la composition des forces, on trouvera le centre I de gravité des deux droites AB et BC à l'aide des équations (L), dans lesquelles on fera P et Q proportionnels à AB et BC. On aura de la même manière le centre de gravité H du système des trois côtés AB, BC, CD, en supposant qu'il y a en I et G'', des forces parallèles et respectivement proportionnelles à $AB+BC$, et CD; ainsi de suite.

2°. Si on veut employer le principe des momens, on mènera dans le plan du polygone deux axes quelconques Fx, Fy perpendiculaires entre eux : on désignera par x', y'; x'', y''; etc. les distances des centres de gravité de chacun des côtés à ces deux axes, et par c', c''.... les longueurs respectives de ces côtés ; c'est-à-dire qu'on fera

$$x' = P'F,\quad y' = P'G',\quad c' = AB;\ \text{etc.}$$

La position de la résultante, par rapport à chacun des deux axes, sera déterminée par les équations (R, 36) *

$$FQ = \frac{c'x' + c''x'' + \text{etc.}}{c' + c'' + \text{etc.}},\quad QO = \frac{c'y' + c''y'' + \text{etc.}}{c' + c'' + \text{etc.}}.$$

Ces valeurs donnent le point O, qui est le centre de gravité demandé.

58. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un triangle rectiligne.* * Fig. 25.

Soit le triangle ABC; il est clair que si on divise le côté AB, au point D, en deux parties égales, la droite CD coupera la surface du triangle en deux parties symétriques (*). On peut en dire autant de la droite AE, menée au point E, milieu de CB : donc le centre de gravité est à-la-fois sur les droites AE et CD; ainsi ce centre est à leur intersection G. *

(*) La symétrie dont il est question ici, consiste en ce que la somme des momens de toutes les molécules qui composent le triangle est nulle par rapport à CD. En effet, soit une de ces molécules en m : menons $A'B'$ parallèle à AB, il y aura de l'autre côté de CD une autre molécule m' à la même distance du point O d'intersection de $A'B'$ avec CD; et par conséquent m et m' seront à la même distance de CD. Si donc on prend CD pour l'axe des momens, les molécules m et m' auront des momens égaux et des signes contraires; et comme O est le milieu de $A'B'$, la même chose aura lieu pour toutes les molécules de cette ligne, ou pour une autre parallèle quelconque à AB; ce qui démontre que la somme des momens des molécules est nulle; donc le centre de gravité est sur CD (36). Fig. 26.

Si on veut savoir en quel point de CD le centre G doit être placé, il est aisé de se convaincre qu'il est aux deux tiers de cette ligne à partir du sommet. En effet, la droite DI passant par [illegible] et I, coupe les côtés AB, BC en deux parties égales; elle sera donc parallèle à AC, et sa longueur sera la moitié de AC. Mais les triangles semblables AGC, GDI donnent $\frac{GC}{GI} = \frac{AC}{DI}$; donc $GI = [illegible] GC$; c'est-à-dire que si on divise CI en trois parties égales, GI sera l'une d'elles, et GC comprendra les deux autres.

Il est d'ailleurs clair que la droite menée de I au milieu de $A[illegible]$, passe par le point [illegible], et que la construction précédente ne donne qu'un centre de gravité, car on démontrerait de même que cette droite doit couper CD au tiers de sa longueur à partir de [illegible].

56. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone rectiligne quelconque.*

On mènera, d'un des angles A du polygone, des diagonales AC, AD qui le décomposeront en plusieurs triangles dont on cherchera séparément les centres de gravité G, G', G'' par le procédé précédent. On supposera le poids de chaque triangle concentré en ce point [illegible], et on cherchera la résultante soit à l'aide du principe de la composition des forces [illegible], soit à l'aide de celui des moments [illegible].

1° Dans le premier cas, on joindra G et G' par une droite, on supposera en G et G' deux forces parallèles respectivement proportionnelles aux surfaces ABC, ACD, [illegible] et on cherchera le point O d'application de la résultante [illegible] des équations [illegible] de même le point E d'application de la résultante totale.

2°. Dans le second cas, on imitera ce qui a été fait dans * le paragraphe 57 ; on mènera dans le plan du polygone deux axes arbitraires perpendiculaires entre eux ; on supposera que c', c'', etc. sont les masses ou les aires des triangles ; et que x', y'; x'', y''; etc. sont les distances entre les axes et les centres de gravité G', G'', G''', de chacun de ces triangles. On aura pour les distances de ces mêmes axes au centre de gravité du polygone les valeurs du n°. 57. Ces coordonnées déterminent le centre de gravité cherché.

60. On voit, d'après ce court exposé, qu'on pourra * trouver le centre de gravité d'un système quelconque de droites, ou d'aires planes terminées par des droites. Il ne faudra que chercher le centre de gravité de chacune des parties : le problème sera réduit à trouver celui d'un système de points ; ce qu'on peut faire à l'aide de la théorie de la composition des forces ou du principe des momens.

61. *Trouver le centre de gravité du volume d'un prisme quelconque à bases opposées parallèles.* *

On cherchera les centres de gravité des surfaces de ses bases, et on mènera une droite par ces deux points; elle sera placée symétriquement par rapport au solide, et devra (53) contenir le centre de gravité cherché, qui sera en son milieu.

62. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide.* *

On cherchera le centre de gravité G de la base, et on Fig. 28 et 30.
mènera une droite AG du sommet à ce point; elle sera disposée symétriquement (*), et devra contenir le centre

(*) On fera ici la même observation que pour le triangle, et le mot de *symétrie* dont on se sert, n'est employé que pour exprimer d'une manière abrégée que la somme des momens cherché : il y sera d'ailleurs placé *aux trois quarts de sa longueur à partir du sommet.* Pour démontrer cette proposition, nous distinguerons deux cas.

Fig. 29 1°. *Si la pyramide est triangulaire*, on aura les centres de gravité F et G des faces BCD et ABC, en menant du milieu E de l'arête BC des droites aux angles A et D; et prenant $EF = \frac{1}{3} . ED$, puis $EG = \frac{1}{3} . AE$, les droites AF et GD devront se couper en un point H, puisqu'elles sont dans le plan AED : de plus chacune d'elles devra contenir le centre de gravité cherché (53) qui sera par conséquent en H. Menons GF; cette droite sera parallèle à AD, et sa longueur sera le tiers de AD, car elle coupe ED et EA au tiers de leurs longueurs respectives; et comme les triangles GHF et AHD sont semblables, on a $\frac{AH}{HF} = \frac{AD}{GF}$; donc $HF = \frac{1}{3} AH$, et si on divise AF en quatre parties égales, HF sera l'une d'elles, et AH contiendra les trois autres.

Fig. 28. de toutes les molécules par rapport à tout plan passant par AG est nulle. En effet, menons deux plans, l'un parallèle à la base, et l'autre RgG suivant AG : le premier doit couper la pyramide suivant un polygone $bcdef$ (semblable à la base $BCDEF$) dont le centre de gravité sera visiblement au point g, où ce même plan rencontre AG. Représentons maintenant les poids des diverses molécules de la pyramide par des forces parallèles au second de ces plans RgG; la somme des momens de celles qui agissent sur les molécules du polygone doit être nulle, puisque ce plan RgG contient la résultante qui passe en g; et comme on peut en dire autant de tout autre plan parallèle à la base de la pyramide, il s'ensuit que le plan mené par AG contient le centre de gravité : mais tout autre plan mené suivant AG offriroit la même conséquence; donc AG contient le centre de gravité de la pyramide.

Ce raisonnement doit s'appliquer au prisme, n°. 61.

La construction que nous venons de faire sur le milieu E de BC, peut être appliquée à tout autre arête BD, et on obtiendroit le même point H. Cela résulte de ce que la ligne qu'on mèneroit du centre de gravité de la face ABD à l'angle trièdre opposé C, devroit aussi couper GD et AF aux trois quarts, à partir des points D et A.

2°. *Si la pyramide a une base quelconque*, après avoir trouvé le centre de gravité G de cette base, on mènera la droite AG par le sommet : elle contiendra le centre cherché. On divisera la base en triangles par des diagonales menées de l'un de ses angles F; on fera passer par le sommet et ces diagonales des plans, qui décomposeront le volume en pyramides triangulaires, dont on cherchera les centres de gravité respectifs en L, M et N. Ils seront, d'après ce qui vient d'être dit, sur les droites menées aux centres de gravité de leurs bases, et aux trois quarts de leurs longueurs à partir du sommet A. * Fig. 3.

Par la théorie des lignes proportionnelles, il est clair que les points L, M et N seront dans un plan parallèle à la base; ce plan contiendra d'ailleurs le centre de gravité cherché, puisqu'on peut concentrer chaque pyramide en son centre de gravité, c'est-à-dire en L, M et N (52, 4°.), et que le centre des forces est toujours situé dans le même plan que les points d'application (37). Le centre de gravité cherché sera donc en I, au point d'intersection de la ligne AG par ce plan; or on sait que ce plan doit couper toutes les droites partant du point A, en parties proportionnelles : donc I sera aux trois quarts à partir du sommet. *

63. D'après cela, on peut trouver, soit à l'aide de la composition des forces, soit par le principe des momens, le centre de gravité d'un corps terminé par des faces planes, puisqu'on peut toujours le concevoir décomposé en pyramides ou en prismes, dont on saura trouver en particulier *

sera symétrique par rapport à la courbe, puisqu'alors cet axe contenant le centre de gravité, on aura $Y = 0$.

Si la courbe dont on cherche le centre de gravité est à double courbure, elle doit être donnée par ses deux projections (24) sur les plans coordonnés, ou plus généralement par deux surfaces courbes dont elle est l'intersection : ainsi on aura, dans ce cas, deux équations pour cette courbe ; et $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, donnera ds et s en fonction de l'une des variables x, y et z. Les coordonnées du centre de gravité sont visiblement alors

$$X = \frac{\int(xds)}{s}, \quad Y = \frac{\int(yds)}{s}, \quad Z = \frac{\int(zds)}{s}.$$

65. Cherchons le centre de gravité d'une ligne droite. Il est évident (53) que ce centre est au milieu de la longueur de la droite : ce n'est donc pas tant pour déterminer ce centre que nous allons résoudre le problême analytiquement, que pour appliquer à un exemple simple les valeurs (D'), et les observations précédentes.

Fig. 32. Soit $y = ax + b$ l'équation de la droite DE ; supposons qu'il s'agisse de trouver le centre de gravité de la partie DE de cette droite : faisons $AB = \alpha$, $BD = \beta$; $AC = \alpha'$, $CE = \beta'$. On a $dy = adx$, d'où on tire

$$ds = dx \cdot \sqrt{(1 + a^2)}, \quad ds = \frac{dy}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)}.$$

Donc $s = x \cdot \sqrt{(1+a^2)} + A$, et $s = \frac{y}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)} + B$: or $s = 0$, donne $x = \alpha$, et $y = \beta$; donc $A = -\alpha \cdot \sqrt{(1+a^2)}$, et $B = -\frac{\beta}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)}$; ainsi

$$s = (x - \alpha) \cdot \sqrt{(1 + a^2)}, \quad s = \frac{y - \beta}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)},$$

substituant dans les formules (D') on trouve

$$X=\frac{\int(xdx)}{x-\alpha}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^2+C}{x-\alpha};\ Y=\frac{\int(ydy)}{y-\beta}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{y^2+D}{y-\beta}.$$

On détermine les constantes C et D en égalant les numérateurs à zéro après y avoir fait $x=\alpha$ et $y=\beta$, ce qui donne $C=-\alpha^2$, $D=-\beta^2$; et par conséquent $X=\frac{1}{2}(x+\alpha)$, $Y=\frac{1}{2}(y+\beta)$. Pour completter l'intégrale, il faut changer x en α' et y en β' : ainsi $X=\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)$ et $Y=\frac{1}{2}(\beta'+\beta)$. Mais dans le trapèze $BDEC$, on voit que pour le milieu G de DE, on a $AF=\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)$, $FG=\frac{1}{2}(\beta'+\beta)$: ce qui démontre que $AF=X$, $FG=Y$.

66. Soit demandé le centre de gravité d'un arc de cercle MM'. L'équation du cercle est $y^2=a^2-x^2$, quand l'origine est au centre C, et que a est le rayon AC. Prenons pour axe des x la ligne Cx qui passe par le milieu de A de l'arc MM'; à cause des arcs AM et AM' symétriques par rapport à AC, le centre de gravité est sur AC en un point I, et sa distance CI à l'axe Cy est la même que pour l'arc AM : faisons $AM=s$; d'où Fig. 8.

$$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=-\frac{adx}{y}=-\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

(on préfère ici le signe $-$ parce que x décroît lorsque s croît) la première équation (D') devient

$$X=\frac{a}{s}\int\frac{-xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{a}{s}\cdot\sqrt{(a^2-x^2)}=\frac{ay+C}{s}.$$

Pour déterminer C, il faut faire $y=0$ dans le numérateur et égaler à zéro; car l'arc étant nul, la somme des momens de ses parties est aussi nulle : on a $C=0$.

Donc $X = \frac{ay}{s}$; on tire de là $\frac{2s}{a} = \frac{2y}{IC}$, ou $\frac{\text{arc } MAM'}{\text{rayon } AC} = \frac{\text{corde } MM'}{IC}$. Ainsi *IC est quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.*

Le centre de gravité de la circonférence entière est visiblement au centre C (53). C'est aussi ce que donne la valeur ci-dessus de X; car $x = -a$, donne $y = 0$ et $s = \pi a$; d'où on tire $X = 0$. Pour la demi-circonférence, on a $2s = \pi a$ et $y = a$: donc $\frac{1}{2}\pi X = a$; ce qui veut dire que le rayon AC est égal au quadran décrit avec un rayon $= X$.

Fig. 34. 67. Soit enfin proposé de trouver le centre de gravité de l'arc cycloïdal MAM', dont le cercle générateur a pour diamètre $AB = a$. L'équation de la courbe (*Traité élém. de calcul diff.* de Lacroix, n°. 102) est $dx = \frac{y dy}{\sqrt{(ay - y^2)}}$, l'origine étant en C, et l'axe des x étant CB. Transportons l'origine au sommet A, et prenons AB pour axe des x : comme CC' est le développement de la circonférence du cercle générateur, on a $CB = \frac{1}{2}\pi a$; il faut donc changer x en $\frac{1}{2}\pi a - y'$, et y en $a - x'$; par là on a

$$dy' = \frac{(a - x')\,dx'}{\sqrt{(ax' - x'^2)}} = dx' . \sqrt{\left(\frac{a - x'}{x'}\right)}.$$

Désignons l'arc AM par s, nous aurons............. $ds = \sqrt{(dx'^2 + dy'^2)} = dx . \sqrt{\left(\frac{a}{x'}\right)}$, d'où on tire $s = \sqrt{a} . \int \frac{dx'}{\sqrt{x'}} = 2\sqrt{(ax')}$; (d'où on conclut que dans la cycloïde l'arc AM est double de la corde correspondante AL du cercle générateur, car $AL = \sqrt{(ax')}$):

ainsi $s^2 = 4ax'$. En vertu de la symétrie (53) des arcs MA et $M'A$, le centre de gravité est sur AB, et son abscisse X est la même que celle du centre de gravité de $AM = s$; comme $\int(xds) = \int \frac{s^2 ds}{4a}$, la première équation (D') devient

$$X = \frac{\int(s^2 ds)}{4as} = \frac{s^3 + A}{12as} = \frac{s^3}{12as} = \frac{4ax}{12a} = \tfrac{1}{3}x.$$

Ainsi le centre de gravité de l'arc MAM' est au tiers de l'abscisse AP. Celui de la cycloïde entière est au tiers du diamètre AB.

68. Trouver *le centre de gravité de l'aire d'une courbe plane*. Soit A l'origine, et DCM une courbe donnée par son équation $y = fx$; proposons-nous de trouver le centre de gravité de l'aire $BCZF$; soit $AP = x$, $PM = y$. L'élément infiniment petit $PMmp$ a pour aire ydx; sa masse peut être concentrée au milieu de PM qui en est le centre de gravité : les momens par rapport à Ax et Ay sont donc $\frac{1}{2}y^2dx$ et $xydx$. On éliminera de chacune de ces expressions l'une des variables à l'aide de l'équation $y = fx$, et intégrant ensuite depuis $x = AB$ et $y = BC$, jusqu'à $x = AF$ et $y = FZ$, on aura $\frac{1}{2}\int y^2dx$ et $\int xydx$ pour les sommes des momens de tous les élémens qui composent l'aire $BCZF$: et $\int ydx$ pour cette aire : ainsi on aura (56) pour les coordonnées du centre de gravité Fig. 31.

$$X = \frac{\int(xydx)}{\int(ydx)}, \quad Y = \frac{\int(y^2 dx)}{2\int(ydx)} \dots (E').$$

S'il s'agissoit de l'aire $B'CZF'$ comprise entre deux courbes, ou deux branches de la même courbe, on auroit leurs équations $y = fx$ pour CZ, et $y' = Fx$ pour $B'F'$:

on fera le même raisonnement. L'élément $P'Mmp'$ est $=(y-y')dx$; les coordonnées du milieu de $P'M$ sont x et $\frac{1}{2}(y+y')$: les momens, par rapport à Ax et Ay sont donc (en concevant l'élément concentré au milieu de $P'M$), $\frac{1}{2}(y^2-y'^2)\,dx$ et $(y-y')\,xdx$; de sorte que les coordonnées du centre de gravité sont

$$X=\frac{\int(y-y')\,xdx}{\int(y-y')\,dx},\quad Y=\frac{\int(y^2-y'^2)\,dx}{2\int(y-y')\,dx}\ldots\ldots(F').$$

On peut aussi trouver les formules (E') et (F') par le procédé suivant, qui se prête aisément au cas où, au lieu des droites BC, FZ, on auroit pour limites deux courbes: cette marche nous sera d'ailleurs utile par la suite. Concevons un élément $abcd$ rectangulaire, infiniment petit dans les deux sens, et dont les côtés soient respectivement parallèles aux axes Ax et Ay : et faisons $aP=z$. L'élément sera $dxdz$ et ses momens, par rapport à ces axes, seront $zdxdz$ et $xdxdz$. Si on intègre ces expressions par rapport à z seule, l'aire de l'élément $PMmp$ sera zdx, ou plutôt ydx (à cause que cette aire a été prise de $z=0$ à $z=y$), dans le cas où l'aire est terminée par l'axe Ax : $\frac{1}{2}z^2\,dx$ et $xzdx$, (ou par la même raison $\frac{1}{2}y^2dx$ et $xydx$), seront de même les momens par rapport aux x et aux y, de tous les élémens renfermés entre les deux coordonnées infiniment voisines PM et pm. Intégrant ensuite ydx, $\frac{1}{2}y^2\,dx$ et $xydx$, de $x=AB$, à $x=AF$, on aura l'aire $BCZF$, et les sommes des momens de tous les élémens de cette aire, par rapport aux x et aux y; ce qui redonne les formules (E').

Supposons qu'il s'agisse de trouver le centre de gravité de l'aire $B'CZF'$ renfermée entre deux coordonnées et deux courbes données ou deux branches de la même courbe; tout ce qui a été dit ci-dessus peut aisément recevoir ici son application; $dzdx$, $zdxdz$ et $xdxdz$ sont l'élément $abcd$, et ses momens: zdx, $\frac{1}{2}z^2dx$ et $xzdx$ sont encore l'aire $P'Mmp'$, et les sommes des momens de ses élémens par rapport aux axes, pourvu que ces intégrales soient prises de $z = PP'$, à $z = PM$. Ainsi, soit $PM = y$, et $PP' = y'$, on aura respectivement $(y - y')\,dx$, $\frac{1}{2}(y^2 - y'^2)\,dx$ et $(y - y')\,xdx$ pour l'aire $P'Mmp'$, et les momens de ses élémens. On intégrera de $x = AB$ à $x = AF$, et on aura l'aire $B'CZF'$, et les sommes de tous les momens des élémens qui la composent: ce qui conduit aux valeurs (F').

Il est intéressant de remarquer que les formules précédentes peuvent aussi s'appliquer aux cas où les coordonnées de la courbe ne sont pas à angle droit. En effet, soit α l'angle qu'elles forment, l'élément $PMmp$ est $ydx \,.\, \sin\alpha$, et l'aire entière est $\int ydx \sin\alpha$; de même $\frac{1}{2}\int y^2 dx \,.\, \sin\alpha$, et $\int xydx \,.\, \sin\alpha$ sont les sommes des produits des élémens de cette aire par leurs coordonnées. Or observant que le théorème du n°. 34 a lieu même lorsqu'elles ne sont pas à angle droit, il est évident que les coordonnées X et Y du centre de gravité de l'aire sont les mêmes que nous avons trouvées précédemment, puisque la constante $\sin\alpha$ disparoît comme étant facteur commun des deux termes de chaque fraction.

69. Prenons pour premier exemple le trapèze DE. Il faut concevoir que la droite AG, axe des x, partage chacun des deux côtés parallèles DC, EF, en deux parties égales. Le centre de gravité I sera sur cet axe, et la première des formules (E') suffira pour trouver la distance de ce centre I au point A, car les abscisses des centres de gravité des aires $ACEC$, $CEFD$ sont les mêmes, à cause de la symétrie (53) des deux parties $ACEG$, $AGFD$. Soient $CD = b$, $EF = b'$, $AG = m$, $AP = x$, Fig. 35.

$PM=y$; quoique les coordonnées puissent être obliques, on a $y=ax+\frac{1}{2}b$, pour l'équation de la droite CE, et par conséquent

$$\int(xydx)=\int(ax^2dx+\tfrac{1}{2}bxdx)=\tfrac{1}{3}.ax^3+\tfrac{1}{4}.bx^2+C.$$
$$\int(ydx)=\int(axdx+\tfrac{1}{2}bdx)=\tfrac{1}{2}.ax^2+\tfrac{1}{2}.bx+C'.$$

Les constantes C et C' sont nulles parce que les intégrales le sont elles-mêmes lorsque $x=0$; ainsi on a pour l'abscisse du centre de gravité de $CAPM$ ou de $CMM'D$, $X=\dfrac{4\,ax+3\,b}{6\,ax+6\,b}\times x$. Mais la droite CE étant assujettie à passer par le point E dont l'abscisse est $x=m$, et l'ordonnée est $y=\frac{1}{2}b'$, l'équation $y=ax+\frac{1}{2}b$ devra être satisfaite par ces valeurs; ainsi $\frac{1}{2}b'=am+\frac{1}{2}b$, d'où $a=\dfrac{b'-b}{2\,m}$. Il ne s'agit plus maintenant que de mettre cette valeur pour a dans X, et pour avoir AI, de faire $x=m$; mettant donc ici $2\,am$ ou $b'-b$ pour $2\,ax$, on trouve enfin

$$AI=\tfrac{1}{3}\,m\,.\,\frac{b+2\,b'}{b+b'}.$$

Cette valeur donne aussi la position du centre de gravité du parallélogramme et du triangle : en effet, dans le premier cas on a $b'=b$, ainsi $AI=\frac{1}{2}m$; dans le second, on a $b=0$, d'où $AI=\frac{2}{3}m$; ce résultat a été déja obtenu (58); on auroit pu le chercher immédiatement par l'analyse.

70. Cherchons le centre de gravité d'un segment parabolique : l'équation de la parabole étant $y^2=px$, on a

$$\int xydx=\tfrac{2}{5}x^2\sqrt{(px)}+C;\ \int ydx=\tfrac{2}{3}x\sqrt{(px)}+C'.$$

Si l'aire dont on cherche le centre de gravité commence à l'origine, C et C' sont nuls. En observant que la symétrie par rapport à l'axe des x rend la seconde formule (E') inutile, on a $X = \frac{3}{5}x$; donc *le centre de gravité d'un segment parabolique est sur l'axe des abscisses, aux trois cinquièmes de la longueur de cette abscisse.*

71. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'une surface de révolution.*

Supposons que la courbe génératrice tourne autour de l'axe des x; le centre de gravité est sur cet axe, et, en désignant par $y = fx$ l'équation de cette courbe, l'aire engendrée a pour élément circulaire $2\pi y ds$: si donc on conçoit un plan perpendiculaire à l'axe des x, et passant par l'origine, le moment de cet élément par rapport à ce plan est $2\pi xyds$; en mettant pour y et $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, leurs valeurs en fonction de x et dx, et intégrant entre les limites convenables, on aura $2\pi\int yds$ pour l'aire entière, et $2\pi\int xyds$ pour la somme des momens de tous les élémens qui la composent. Ainsi (56) on aura pour la distance du centre de gravité à l'origine

$$X = \frac{\int xyds}{\int yds} \ldots\ldots\ldots\ldots (G').$$

Prenons pour exemple les surfaces engendrées par une droite. L'équation de la ligne génératrice est $y = ax + b$; donc $ds = dx\sqrt{(a^2 + 1)}$. Ainsi

$$\int xyds = \sqrt{(a^2+1)}\int xydx, \quad \text{et} \quad \int yds = \sqrt{(a^2+1)}\int ydx.$$

Donc $$X = \frac{\int xydx}{\int ydx}.$$

Or, cette expression est la même chose que (E'); ce qui fait voir que le centre de gravité de l'aire de toute surface

... engendrée par une droite autour de l'axe ... coordonnée dans le sens de cet axe ... de gravité de l'aire génératrice. Il en résulte ... *de gravité de l'aire d'un trapèze, d'un ... ou d'un triangle, est respectivement à ... distance de l'origine que le centre de gravité ... d'un cône tronqué, d'un cylindre ou d'un cône.*

... proposé de trouver le centre de gravité de la ... d'une zône sphérique, c'est-à-dire d'une portion ... d'une sphère comprise entre deux plans parallèles. ... cela, comme l'équation du cercle est $y^2 = 2ax - x^2$, ... étant le rayon, et l'origine étant au sommet, on a $s = \frac{adx}{y}$, d'où $yds = adx$. En substituant dans la formule (G'), on a

$$X = \frac{\frac{1}{2}ax^2 + C}{ax + C'}.$$

On déterminera aisément C et C', quand on connoîtra la position et la longueur de l'arc générateur par rapport à l'axe ... Mais s'il s'agit d'une calotte sphérique, on a ... , $C' = 0$, et par conséquent $X = \frac{1}{2}x$. Donc *le centre de gravité de la calotte sphérique est au milieu de la flèche.*

... *Trouver le centre de gravité d'une surface courbe ...*

... rapportée à trois plans coordonnés, a ... soit $dz = pdx + qdy$, l'équation ... de cette surface; et faisons, pour abréger, ... L'élément de l'aire est $Mdxdy$ ... conformément aux principes du calcul intégral (voyez ... *du calcul diff.* de Lacroix, 251) : donc ... $Mdxdy$ ... et ... $Mdxdy$, sont les momens de cet élément par rapport aux trois plans respectifs des xy, des xz et des yz. Donc $\int\int Mdxdy$ est l'aire entière, et $\int\int zMdxdy$, $\int\int yMdxdy$, $\int\int xMdxdy$, sont les sommes des momens des élémens qui la composent : les doubles intégrales doivent être prises dans les limites convenables. Ainsi les trois coordonnées du centre de gravité sont (56)

$$X=\frac{\int\int xMdxdy}{\int\int Mdxdy};\ Y=\frac{\int\int yMdxdy}{\int\int Mdxdy};\ Z=\frac{\int\int zMdxdy}{\int\int Mdxdy}.$$

74. *Trouver le centre de gravité d'un volume quelconque symétrique par rapport à un axe :* tels sont les pyramides, les solides de révolution, etc. Fig. 36.

Si, à partir du point C quelconque, on prend sur l'axe une longueur $CP=x$, et si on coupe le solide par un plan perpendiculaire à cet axe, la section K qu'on obtiendra sera connue en fonction de x, puisque la génération du solide est donnée; ainsi on aura $K=fx$. Soit $Pp=dx$, Kdx sera l'élément $M'Mmm'$ du volume, et si on conçoit un plan perpendiculaire en C à l'axe CB, sur lequel est le centre de gravité, $Kxdx$ sera le moment de cet élément par rapport à ce plan. Ainsi $\int Kdx$ sera le volume, et $\int Kxdx$ sera la somme des momens de tous ses élémens. On aura donc (56)

$$X=\frac{\int Kxdx}{\int Kdx}\ldots\ldots\ldots\ldots (H').$$

Pour se servir de cette formule, il faut trouver K en fonction de x, d'après la nature du corps, faire les intégrations, et déterminer convenablement les constantes. Il est clair que, par la même raison que précédemment (68), il n'est pas nécessaire que AB soit perpendiculaire sur MM'

75. S'il s'agit, par exemple, d'une pyramide ou d'un Fig. 37.

cône, l'arête AH est une droite : prenons l'origine au sommet A, faisons $AB = b$, et représentons par a l'aire de la base Hh. On sait que K et a, qui sont les aires de deux sections parallèles, sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet A : ainsi on a $\frac{b^2}{x^2} = \frac{a}{K}$, d'où on tire $K = \frac{ax^2}{b^2}$; substituant dans la formule (H'), on a

$$X = \frac{\int Kxdx}{\int Kdx} = \frac{\int x^3dx}{\int x^2dx} = \frac{3x^4 + A}{4x^3 + B}.$$

Si le solide n'est pas tronqué, on a $A = 0$ et $B = 0$; d'où $X = \frac{3}{4}x$; puis faisant $x = b$, on a $X = \frac{3}{4}b$; ce qui est le résultat déja connu (62). Mais si le solide est tronqué, en prenant $AS = m$ pour l'abscisse de la base supérieure LO, on a $A = -3m^4$, et $B = -4m^3$, d'où on tire, en mettant b pour x, $X = \frac{3}{4} \cdot \frac{b^4 - m^4}{b^3 - m^3}$. Les quantités qu'on regarde comme connues dans un cône tronqué sont les rayons des cercles de ses deux bases et sa hauteur. Soit $SO = r$, $BH = R$, et $SB = h$; il s'agit de trouver X en fonction de R, r et h. Or on a aisément $m = \frac{hr}{R - r}$ et $b = \frac{hR}{R - r}$: en substituant on obtient

$$X = \frac{3}{4}h \cdot \frac{R^4 - r^4}{(R - r)(R^3 - r^3)}.$$

76. *Trouver le centre de gravité du volume d'un corps de révolution.*

On sait que πy^2dx est l'élément du corps perpendiculaire à l'axe de révolution ; πxy^2dx est son moment par rapport à un plan perpendiculaire à cet axe, et passant par l'origine; $\pi\int y^2dx$ est le volume entier, $\pi\int xy^2dx$ est la somme des momens de ses élémens. Donc on a (56)

$$X=\frac{\int xy^2dx}{\int y^2dx} \dots\dots\dots\dots (I').$$

Cette formule peut se déduire de (H') comme cas particulier : en effet K est ici un cercle dont y est le rayon, ainsi on a $K=\pi y^2$, en substituant, on retrouve la valeur précédente.

On pourroit appliquer immédiatement la formule (I') à la recherche du centre de gravité du cône, et du cône tronqué : il faudroit pour cela prendre pour génératrice une droite passant par l'origine; et dont l'équation seroit $y=ax$. On obtiendroit ainsi pour X les valeurs déja trouvées.

77. Soit pris pour exemple le segment sphérique MAM' : Fig. 33.
l'équation du cercle dont le rayon est a, l'origine étant au sommet A, est $y^2=2ax-x^2$; la formule (I') devient donc

$$X=\frac{\int(2ax^2dx-x^3dx)}{\int(2axdx-x^2dx)}=\frac{\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{4}x^4+C}{ax^2-\frac{1}{3}x^3+D}.$$

En observant que le volume et les momens doivent devenir nuls quand $x=0$, on trouve $C=0$, et $D=0$. Ainsi

$$X=\frac{8a-3x}{12a-4x}\times x.$$

S'il s'agit de la demi-sphère, il faut faire $x=a$, et on a $X=\frac{5}{8}a$; donc le *centre de gravité de la demi-sphère es aux trois huitièmes du rayon à partir du centre.*

Dans le segment parabolique le centre de gravité est *aux deux tiers de l'axe à partir du sommet :* car l'équation de la parabole, $y^2 = px$, donne pour (I')

$$X = \frac{\int px^2dx}{\int pxdx} = \frac{\frac{1}{3}px^3}{\frac{1}{2}px^2} = \frac{2}{3}.x.$$

L'équation de l'hyperbole est, en prenant l'origine au sommet, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$: on aura pour le centre de gravité du solide engendré par cette courbe.

$$X = \frac{\int(2ax^2 + x^3)dx}{\int(2ax + x^2)dx} = \frac{\frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{4}x^4}{ax^2 + \frac{1}{3}x^3} = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} \times x.$$

Cette valeur approche d'autant plus de $\frac{2}{3}x$ que x est plus petit, et de $\frac{3}{4}x$ que x est plus grand, par rapport à a : X ne peut jamais avoir pour valeur l'une de ces deux quantités, et elles sont les limites entre lesquelles le centre de gravité doit se trouver. Donc *le centre de gravité du segment hyperbolique est entre les deux tiers et les trois quarts de l'abscisse à compter du sommet.*

78. *Trouver le centre de gravité d'un volume quelconque.*

Supposons que ce volume s'étende depuis le plan des xy, jusqu'à une surface courbe donnée dont l'équation est $z = f(x, y)$, et soit terminé latéralement par des plans parallèles à ceux des xz et des yz; $zdxdy$ sera l'élément du solide, et on pourra en supposer la masse concentrée (52, 4°.) au milieu de sa hauteur. Ainsi les momens de cet élément par rapport aux plans respectifs des xy, des xz et des yz sont $\frac{1}{2}z^2dxdy$, $yzdxdy$, $xzdxdy$: on obtiendra donc les sommes des momens de tous les élémens qui composent le volume, et le volume lui-même, en substituant $f(x, y)$ pour z dans ces trois expressions, et dans $zdxdy$; puis intégrant par rapport aux deux variables, x, y, entre les limites convenables. Ainsi (56) les coordonnées du centre de gravité sont

$$X = \frac{\iint xzdxdy}{\iint zdxdy}, \quad Y = \frac{\iint yzdxdy}{\iint zdxdy}, \quad Z = \frac{\iint z^2dxdy}{2\iint zdxdy}.$$

Si le corps étoit compris entre deux surfaces courbes, ou deux nappes de la même surface, il seroit facile de se régler sur ce qui a été dit (68).

Soit proposé de trouver le centre de gravité du volume d'un *Conoïde ;* cette surface est engendrée par le mouvement de la droite QM qui se meut sans cesser d'être parallèle au plan xy, et en glissant le long de l'axe des z d'une part, et sur un cintre DMC de l'autre. Nous regarderons cette courbe comme elliptique, et en désignant par a et b les deux demi-axes OD et OG, et AO par c, l'équation de cette surface (*) est $a^2c^2y^2 + b^2x^2z^2 = a^2b^2x^2$. La valeur X est ici seule nécessaire. Fig. 38.

Cherchons d'abord le volume du corps ou $\int zdxdy$; on mettra pour z sa valeur et on intégrera par rapport à y seul la quantité

$$dx\int zdy = \frac{adx}{bx}\int dy\sqrt{(b^2x^2 - c^2y^2)},$$

on fera pour cela $\sqrt{(b^2x^2 - c^2y^2)} = t(bx + cy)$; cette

(*) Car, les équations du cintre DMC sont $x = c$, et $a^2y^2 + b^2z^2 = a^2b^2$; celles d'une génératrice quelconque sont $y = \alpha x$, $z = \beta$. En éliminant x, y et z entre ces quatre équations, on a $a^2c^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = a^2b^2$ qui exprime que la droite est une génératrice : il ne s'agit donc plus que de mettre pour α et β leurs valeurs $\frac{y}{x}$ et z.

transformation ordinaire donne

$$y = \frac{bx}{c} \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dy = -\frac{4\,bx}{c} \cdot \frac{t\,dt}{(1 + t^2)^2},$$

par là le radical ou $t\,(bx + cy)$ devient $\frac{2\,bxt}{1 + t^2}$; de sorte qu'on a à intégrer

$$dx\int z\,dy = -\frac{8\,abx\,dx}{c}\int \frac{t^2\,dt}{(1 + t^2)^3};$$

or si on intègre $\frac{dt}{(1 + t^2)^n}$ par parties, on obtient

$$\int \frac{dt}{(1 + t^2)^n} = \frac{t}{(1 + t^2)^n} + 2\,n\int \frac{t^2\,dt}{(1 + t^2)^{n+1}}.$$

on fera successivement n égal à 1 et à 2, et retranchant du second résultat la moitié du premier, puis réunissant en une seule les deux intégrales qui ont $(1 + t^2)^2$ au dénominateur et réduisant, on obtiendra

$$\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^3} = -\tfrac{1}{4} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^2} + \tfrac{1}{8} \cdot \frac{t}{1 + t^2} + \tfrac{1}{8}\,\text{arc}\,(\text{tang} = t).$$

Cela posé pour avoir le volume qui est en dessus du plan xy, il faut prendre l'intégrale depuis la plus petite valeur de y jusqu'à la plus grande : on les trouve par la théorie connue, et $z = 0$ donne $y = \pm\,\frac{bx}{c}$. On intégrera donc depuis $cy = -\,bx$ jusqu'à $cy = +\,bx$. Or la valeur $t = \sqrt{\left(\frac{bx - cy}{bx + cy}\right)}$ donne pour limites $t = \infty$ et $t = 0$. Ces deux hypothèses réduisent à zéro les deux premiers termes de notre intégrale ; la tangente qui entre dans le troisième est infinie dans un cas et nulle dans l'autre; l'arc est donc $\frac{\pi}{2}$ et zéro. Ainsi notre intégrale devient d'une part $= \frac{1}{8}\ \frac{\pi}{2}$, et de l'autre $= 0$: retranchant le premier résultat du second, on a $-\frac{\pi}{16}$, qui substitué ci-dessus, donne

$$dx\int zdy = \frac{ab\pi xdx}{2c}.$$

on intègre de nouveau depuis $x=0$, jusqu'à $x=c$ et on double pour avoir le volume total du corps, qu'on trouve ainsi $\int zdxdy = \frac{1}{2} abc\pi$; c'est comme on voit le produit de l'aire elliptique du cintre, ou $ab\pi$, par la moitié de la hauteur $\frac{1}{2}c$.

Pour avoir la seconde intégrale de $xzdxdy$ il faudra de même intégrer relativement à y seul; ce qui se réduit à multiplier par x le résultat ci-dessus : donc

$$xdx\int zdy = \frac{ab\pi x^2 dx}{2c}, \text{ d'où } \int\int xzdxdy = \tfrac{1}{3} ab\pi c^2,$$

et enfin $X = \frac{2}{3}c$; résultat simple et remarquable.

79. Appliquons à un exemple ce qui a été dit (52, 4°.) pour trouver le centre de gravité d'un système de corps. Cherchons celui du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire MAC en tournant autour de AC. Ce volume est composé d'un segment sphérique et d'un cône, soient I et L leurs centres de gravité respectifs; on a vu (77) qu'en désignant AP par x, et AC par a, on a Fig. 33.

$$AI = \frac{8a-3x}{12a-4x} \times x, \text{ et } PL = \tfrac{1}{4}.CP = \tfrac{1}{4}(a-x).$$

Mais comme les positions de I et de L ne sont pas rapportées au même point A, on remplace la seconde de ces valeurs par

$$AL = AP + PL = x + \tfrac{1}{4}.(a - x) = \frac{3x + a}{4}.$$

Cela posé, concevons les volumes de ces deux corps réunis en leurs centres de gravité I et L : on connoît ces volumes par la géométrie, et on sait que

Le secteur $= \frac{2}{3}\pi a^2 x.$
Le segment $= \frac{1}{3}\pi x^2 (3a - x).$
Le cône $= \frac{1}{3}\pi (2ax - x^2)(a - x).$

En prenant les momens par rapport au point A, on a pour celui du segment

$$\frac{\pi}{3} x^2 (3a - x) \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \times x = \frac{\pi x^3}{3} \times \frac{8a - 3x}{4}.$$

Pour celui du cône

$$\frac{\pi}{3}.(2ax - x^2)(a - x) \times \frac{3x + a}{4}.$$

Enfin divisant la somme des momens par la somme des masses, qui est le volume du secteur, on a (56) pour la distance du point A au centre de gravité cherché, en ôtant le facteur commun $\frac{1}{3}.\pi x$,

$$X = \frac{\frac{1}{4}x^2(8a - 3x) + \frac{1}{4}(2a - x)(a - x)(3x + a)}{2a^2};$$

et en réduisant

$$X = \tfrac{1}{8}(2a + 3x)$$

ce qu'il s'agissoit de trouver.

IV. *Méthode de Guldin.*

80. La méthode *Centrobarique* (*), découverte par *Pappus*, est aussi appelée *règle de Guldin*, parce que ce savant en a fait des applications utiles : elle consiste en un procédé fort simple, pour trouver l'aire ou le volume engendré par la révolution d'une courbe quelconque, quand on connoît l'équation, et le centre de gravité de la ligne ou de l'aire génératrice : voici en quoi consiste cette méthode.

On peut écrire les secondes équations (D') et (E') ainsi qu'il suit

$$Y = \frac{\int 2\pi y ds}{2\pi s}, \quad \text{et} \quad Y = \frac{\int \pi y^2 dx}{2\pi \int y dx}.$$

La première de ces deux équations exprime la coordonnée, dans le sens de l'axe des y, du centre de gravité d'une ligne : elle donne $2\pi Y.s = \int 2\pi y ds$. Or $2\pi Y$ est la circonférence dont Y est le rayon ; c'est celle que décriroit le centre de gravité autour de l'axe des x, si on faisoit tourner la courbe sur cet axe : de plus $\int 2\pi y ds$ est l'expression de l'aire de la surface qu'engendreroit l'arc de courbe s par cette révolution : donc *la surface de révolution engendrée par une courbe donnée autour d'un axe, est égale au produit de la longueur de l'arc générateur par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

La seconde des deux formules ci-dessus exprime la coordonnée dans le sens des y du centre de gravité de l'aire d'une courbe : elle donne $2\pi Y.\int y dx = \int \pi y^2 dx$. Or si on fait tourner la courbe autour de l'axe des x, l'aire dont l'expression est $\int y dx$, engendrera un corps dont le volume

(*) Κέντρον, *centre* ; Βάρος, *poids*.

sera $\int \pi y^2 dx$; et le centre de gravité de l'aire décrira une circonférence $= 2\pi Y$. Donc le *corps qu'une courbe engendre par sa révolution autour d'un axe, a pour volume le produit de l'aire génératrice, par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Cette dernière proposition a lieu même lorsque l'aire génératrice est comprise entre deux courbes, ou entre deux branches d'une même courbe. En effet, la seconde formule (F') donne $2\pi Y \times \int (y - y')dx = \int \pi(y^2 - y'^2)dx$, qui conduit à la même conséquence, puisque $\int (y - y')\, dx$ est l'aire génératrice, et que $\int \pi(y^2 - y'^2)\, dx$ est l'expression du volume engendré par la révolution de cette aire.

Fig. 15. 81. Par exemple, on peut regarder l'aire d'un cercle comme engendrée par le mouvement de son rayon autour du centre; la ligne génératrice est le rayon R dont le centre de gravité est au milieu : la ligne décrite par ce centre est une circonférence dont le rayon est $\frac{1}{2} R$; ainsi elle est $= \pi R$, et la surface du cercle est πR^2, ce qu'on savoit d'ailleurs.

Si la circonférence $FDBE$ tourne autour de l'axe Ax, en faisant le rayon $MB = a$, et la distance MH du centre à l'axe $= b$, on a pour l'aire qu'elle décrit, ... cir. $a \times$ cir. $b = 4\pi^2 ab$: et comme cette valeur est double de la voûte annulaire décrite par la demi-circonférence DEF, l'aire de cette voûte est $= 2\pi^2 ab$. De même le volume engendré par l'aire du cercle est............. $=$ cercle $MB \times$ cir. $MH = 2\pi^2 a^2 b$. Si $a = b$, c'est-à-dire si le cercle tourne autour de la tangente en F, l'aire décrite $= (2\pi a)^2 =$ le carré qui a pour côté la circonférence a; le volume $= 2\pi^2 a^3$.

Fig. 79. De même, si le rectangle $ABDC$ tourne autour du côté BD, il engendrera un cylindre : soit $AC = h$, $CD = r$, le côté AC a son centre de gravité au milieu I, qui décrit

une circonférence dont le rayon est r; donc la surface engendrée, ou l'aire du cylindre $= 2\pi rh$. Comme le rectangle a son centre de gravité à l'intersection G des deux diagonales, le volume du cylindre est

$$AC \times CD \times \text{cir.}\ \tfrac{1}{2} CD = \pi hr^2.$$

Enfin, le triangle rectangle ABH, en tournant autour du côté AB engendre un cône; faisons $AH = a$, $BH = r$, et $AB = h$. Comme le centre de gravité de AH est au milieu F, il décrit une circonférence dont le rayon est $KF = \frac{1}{2} r$; l'aire du cône est donc πra. Soit I le milieu de BH; prenons sur la droite AI une partie $AD = \frac{2}{3}. AI$, D sera le centre de gravité du triangle ABH, et le volume du cône sera cir. $DE \times BH \times \frac{1}{2}. AB$: or......... $DE = \frac{2}{3} BI = \frac{1}{3} BH$, donc cir. $DE = \frac{2}{3}.\pi r$, et le volume du cône $= \frac{1}{3}.\pi r^2 h$. Fig. 37.

Ces résultats, déja connus, ne sont mis ici que pour mieux développer la méthode centrobarique; on pourrait d'ailleurs l'appliquer également au cône tronqué, à la sphère, etc.

82. On pourra donc trouver la surface engendrée par la révolution d'une courbe donnée ou le volume engendré par celle de son aire, lorsqu'on connoîtra le centre de gravité de la courbe ou de l'aire génératrice; ce qui sera facile à trouver par les formules précédentes, toutes les fois que la courbe sera soumise à une loi donnée par une équation. Si cette courbe ne faisoit pas une révolution entière sur son axe, il seroit aisé de trouver encore l'aire ou le volume engendré, car on a évidemment cette analogie : l'aire ou le volume engendré par une révolution entière est à une circonférence quelconque, comme l'aire ou le volume engendré par une portion de révolution, est à l'arc de cette circonférence qui lui sert de mesure angulaire. Donc *l'aire*

ou le volume engendré par une révolution entière, ou par une portion de révolution, est égal au produit du chemin que fait le centre de gravité par la courbe ou l'aire génératrice.

83. Réciproquement aussi, on obtient la circonférence décrite par le centre de gravité d'un arc courbe dans sa révolution autour d'un axe, en divisant la surface qu'engendre cet arc par sa longueur même : donc pour avoir la distance du centre de gravité d'un arc à un axe, il faut le faire tourner autour de cet axe, et diviser la surface qu'il engendre, par la circonférence qui auroit pour rayon la longueur de cet arc; ce théorême peut servir dans un grand nombre de cas à trouver le centre de gravité d'un arc. Par exemple, pour trouver le centre de gravité de l'arc
Fig. 33. MAM', on le fera tourner autour de Cy perpendiculaire au rayon $AC = a$ qui divise cet arc en deux parties égales; comme la surface engendrée par l'arc sera une zône sphérique, elle sera $= 2\pi a. MM'$: en divisant cette valeur par la circonférence qui a MAM' pour rayon, ou par $2\pi . MAM'$, on a $\dfrac{a . MM'}{MAM'}$ pour la distance X du centre cherché à Cy. Si l'arc est la demi-circonférence, elle engendre une surface sphérique $= 4\pi a^2$, et comme l'arc générateur $= \pi a$, on a pour la circonférence décrite par le centre de gravité autour de Cy.......: $2\pi X = \dfrac{4\pi a^2}{\pi a} = 4a$; d'où $\pi X = 2a$. Tout ceci s'accorde avec ce qu'on a vu (66).

De même en divisant le solide engendré dans la révolution d'une aire autour d'un axe, par cette aire et par 2π, on aura la distance du centre de gravité de cette aire à l'axe.
Fig. 29. Ainsi $ABDC$ en tournant autour de BD engendre un cylindre dont le volume est $\pi r^2 h$; l'aire $ABDC = hr$; en

divisant donc $\pi r^2 h$ par $rh \times 2\pi$, on a $\frac{1}{2}r$ pour la distance du centre de gravité de *ABCD* à la ligne *BD*. On auroit de même $\frac{1}{2}h$ pour la distance de ce point à la ligne *CD*. Voyez à cet égard un mémoire de *Varignon*, inséré parmi ceux de l'Académie, pour l'année 1714.

CHAPITRE III.

DES MACHINES.

84. ON appelle *Machines* des corps retenus par des obstacles, tels que des points ou des axes fixes, et à l'aide desquels les forces agissent les unes contre les autres. L'industrie et le besoin ont produit de concert ces inventions mécaniques; on en distingue de *simples* et de *composées*. Il n'y a que trois machines simples, les *Cordes*, le *Plan incliné* et le *Levier* : il ne s'agit pour former des machines composées que de réunir en un même système plusieurs machines simples en les faisant communiquer entre elles. Le but essentiel d'une machine est de changer la grandeur et la direction des forces, de sorte que tout ce qu'on doit dire des machines n'est qu'une suite d'applications très-simples des propositions démontrées précédemment. *

Nous allons traiter séparément de chaque machine simple, et des machines composées les plus ordinaires, en faisant d'abord abstraction des obstacles qui proviennent de la nature des matières qu'on y emploie et de leur construction, tels que le frottement, la roideur des cordes, etc., nous réservant d'y avoir égard par la suite. *

I. *Des Cordes.*

* 85. Les CORDES sont assez connues pour que nous nous dispensions de nous étendre sur leur usage : dans ce que nous allons dire, nous les considérerons comme parfaitement flexibles, sans pesanteur, et réduites à leur axe, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire. On nomme aussi les cordes des *Machines Funiculaires.*

* Nous appellerons *Tension* d'un cordon la force qui agit à l'une de ses extrémités quand l'autre est fixe : lorsqu'on a deux puissances égales et opposées, appliquées à un cordon, l'équilibre a lieu, on peut regarder l'une des extrémités comme fixe ; la tension du cordon est l'une des forces qui agissent sur ce cordon. Mais si l'équilibre n'a pas lieu, ce qui arrive lorsque les deux puissances sont inégales, la tension est la plus petite des deux forces : car l'effet de la plus grande est d'anéantir la plus petite, et de l'entraîner dans le sens de sa propre direction comme le feroit une force égale à l'excès de l'une sur l'autre : or cette dernière partie de l'effet ne peut contribuer à la tension, qui sera la même que s'il n'y avoit que la plus petite des deux forces qui agît.

* 86. Soient trois forces P, Q et R, sollicitant un point
Fig. 45 matériel D, à l'aide de trois cordes AD, CD, BD, unies par un nœud en D : comme on considère les cordes comme inextensibles, lorsque les forces se servent de cordons pour transmettre leur action, elles doivent tirer ces cordons afin de les tendre ; ainsi ils sont assimilables à des verges rigides, de sorte qu'on peut y appliquer les puissances en un point quelconque (13) de leur direction. Il est donc visible qu'il n'y aura équilibre entre les forces P, Q, R, qu'autant que la proposition (18, I) aura lieu ;

ainsi le théorême du parallélogramme des forces, et toutes les vérités qui s'y rapportent reçoivent ici leur application immédiate. En général, quelque nombre de forces qu'on considère agissant à l'aide de cordons sur un point matériel, les conditions de l'équilibre, ou la résultante, seront données, savoir : par les valeurs (F) ou (B, C) si les forces sont disposées dans le même plan, et par les expressions (J) ou (H) si elles sont dans des plans différens.

87. Mais lorsque toutes les puissances ne sont pas réunies en un même nœud, alors le cordon qui transmet leur action mutuelle des unes aux autres, prend la forme d'un polygone qu'on appelle *Polygone Funiculaire* : portons notre attention sur ce système remarquable, et supposons d'abord que toutes les forces sont dans un même plan. *

Ainsi soit $P'M'M''M'''$........ le polygone en question, et P', P'', P''' ... des puissances faisant avec une droite quelconque AX menée dans leur plan, des angles α', α''.... Nommons a', a'',.... les angles que forment les directions des cordons avec cette même droite; et t', t'', ... les tensions respectives des cordons $P'M'$, $M'M''$, $M''M'''$...... * Fig. 41.

Cela posé, puisque l'équilibre a lieu dans ce systême, il faut qu'il existe dans chaque portion du polygone séparément; que P', P'' et t'' soient en équilibre autour du nœud M', aussi bien que t'', P''' et t''' autour du nœud M'', etc. *

Ainsi on aura d'après les équations (F), pour l'équilibre autour du nœud *

$$M' \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + t'' \cos a'' = 0, \\ P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + t'' \sin a'' = 0. \end{array} \right.$$

Observons d'ailleurs qu'on devra faire précéder ces divers termes du signe indiqué par le sens suivant lequel chaque composante agit (26) : nous laissons le signe positif partout, car pour trouver des équations générales et propres à être appliquées à tous les cas, il ne faut ici rien exprimer qui tende à attribuer aux forces données des directions déterminées, et se réserver, pour chaque cas particulier, de fixer leurs positions d'après les signes des sinus et cosinus, ainsi qu'on l'a déja expliqué (26). Quant aux quantités inconnues, on doit regarder ces équations comme destinées à les déterminer d'après la connoissance des autres quantités; si donc une force est inconnue (ainsi que cela arrive ordinairement pour t'' et a'') on doit encore en laisser les composantes positives, et le calcul même donnera, par les signes dont elles seront affectées, le sens suivant lequel elles agissent.

* Au point M'' l'équilibre a lieu entre les forces t'', P''' et t''', ce qui conduit à deux équations analogues aux précédentes : seulement on doit observer que la force t'' dont il s'agit ici, n'est point la même que celle qu'on a employée plus haut, et qu'elle est égale et opposée à celle-ci : de sorte que quelque signe que les composantes de t'' aient dû recevoir, elles doivent en avoir ici de contraires; elles sont donc négatives. Ainsi, on a pour le nœud

$$M'' \ldots \begin{cases} -t'' \cos a'' + P''' \cos \alpha''' + t''' \cos a''' = 0, \\ -t'' \sin a'' + P''' \sin \alpha''' + t''' \sin a''' = 0. \end{cases}$$

on auroit de même pour l'équilibre du nœud

$$M''' \ldots \begin{cases} -t''' \cos a''' + P^{\text{IV}} \cos \alpha^{\text{IV}} + t^{\text{IV}} \cos a^{\text{IV}} = 0, \\ -t''' \sin a''' + P^{\text{IV}} \sin \alpha^{\text{IV}} + t^{\text{IV}} \sin a^{\text{IV}} = 0. \end{cases}$$

et ainsi des autres. Maintenant ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre : si n est le nombre des cordons ou côtés du polygone, $n-1$ sera celui des nœuds, et $2(n-1)$ celui des équations; ainsi on peut résoudre tout problême sur le polygone funiculaire, pourvu que, renfermant $2(n-1)$ inconnues, il ne s'en suive pas de contradiction entre les équations, ce que le calcul apprendra ; et que de plus P', P''..... agissent en tirant (86). Il y a $n+1$ puissances P', P''..... autant d'angles α', α''....., les tensions des cordons sont au nombre de $n-2$ en n'y comprenant pas celles des cordons extrêmes qui sont déja comptées ; (elles sont P' et $P^{(n+1)}$) il y a aussi $n-2$ angles a'', a''', ... : ainsi puisque nos équations comprennent $4n-2$ quantités, $2n-2$ seront inconnues et $2n$ données.

88. Le problême le plus ordinaire est celui où, donnant toutes les forces, on demande si elles sont en équilibre ; de plus, il faut construire le polygone funiculaire et déterminer les tensions des cordons. On voit d'abord que les données sont P', P'', ... α', α''...., dont le nombre est $2n+2$; ainsi il y a deux quantités données de trop : on devra donc être conduit à deux équations de condition pour que l'équilibre ait lieu. Ajoutons les premières équations de chaque groupe entre elles, 2, 3, ... ensemble, et faisons-en autant pour les secondes, nous aurons, outre les deux premières, les suivantes :

$$\begin{cases} P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + t'''\cos a''' = 0 \\ P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + P'''\sin\alpha''' + t'''\sin a''' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + P^{\text{IV}}\cos\alpha^{\text{IV}} + t^{\text{IV}}\cos a^{\text{IV}} = 0 \\ P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + P'''\sin\alpha''' + P^{\text{IV}}\sin\alpha^{\text{IV}} + t^{\text{IV}}\sin a^{\text{IV}} = 0 \end{cases}$$

et ainsi des autres.

Il est clair que ces résultats conduisent tous à des équations de la forme $t\cos a = -X$, $t\sin a = -Y$, X et Y étant des quantités connues, qui représentent la somme des composantes des forces données dans le sens des axes. En quarrant et ajoutant (comme au nº. 23) on a $t^2 = X^2 + Y^2$; de plus, en divisant, on trouve tang $a = \frac{Y}{X}$: ainsi on connoîtra les tensions et les directions des cordons ; c'est-à-dire t', t'', ... a', a'', ... : les longueurs sont d'ailleurs arbitraires, le premier et le dernier cordon du polygone sont tendus par les deux forces extrêmes, on pourra donc construire le polygone funiculaire. Enfin, en ajoutant toutes les équations dans l'ordre ci-dessus désigné, on obtient

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} + P^{(n+1)} \cos \alpha^{(n+1)} = 0,$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \text{etc.} + P^{(n+1)} \sin \alpha^{(n+1)} = 0.$$

* Ce sont les deux équations de condition dont nous avons parlé; et l'équilibre ne peut avoir lieu si elles ne sont satisfaites. On voit, en les comparant avec les valeurs (F), que *pour que tant de forces qu'on voudra soient en équilibre autour d'un Polygone Funiculaire, il faut que si on transporte ces puissances parallèlement à leurs directions pour les appliquer en un même point, elles soient en équilibre.* Ainsi, deux des quantités P', P''...., α', α''.... doivent être indéterminées, (telles que la dernière puissance et sa direction) ; alors nos équations de condition servent à les faire connoître, par le même procédé que t'' et a''. Mais on ne doit pas oublier qu'en général l'équilibre n'est la conséquence de nos équations de condition qu'autant que le polygone est de forme inconnue et que, comme il y a 2 (n — 1) équations qui doivent être satisfaites, elles servent à faire connoître cette forme. La tension t'' du cordon $M'M''$, devant faire équilibre aux forces P', P'', est égale à leur résultante; la force qui agit sur le point M'' est donc la même que si deux forces P', P'' y étoient appliquées parallèlement à leurs directions, et ce

point est sollicité par les quatre forces P', P'', P''' et t''' : or on feroit voir de même que t''' équivaut aux autres puissances P^{iv}, P^{v}, etc. Ainsi chaque angle de polygone est dans le même état que si toutes les forces y étaient appliquées parallèlement à leurs directions. Il faut d'ailleurs observer que tout ce qui vient d'être dit ne suppose pas essentiellement que chaque angle du polygone n'est sollicité que par une seule force. Si donc on veut établir l'équilibre dans un polygone funiculaire, il suffit de déterminer convenablement une force et de la placer en l'un quelconque des angles.

Toutes les conséquences, que nous venons de déduire ne sont pas particulières au polygone funiculaire plan : on y parviendroit de même en imitant ce qui a été dit ci-dessus, et décomposant les forces parallèlement à trois axes. Nous ne nous arrêterons point à cette théorie, assez facile pour que chacun puisse parvenir aisément à ce résultat; de plus, on pourra en conclure que les projections du système sur chaque plan coordonné forment des polygones funiculaires en équilibre.

89. Il suit de là que si un cordon $P'M'M''$.... a l'une de ses extrémités B retenue par un point fixe; et si l'autre extrémité P', ainsi que plusieurs points M', M'' ....., de ce cordon sont sollicités par des forces quelconques P', P''.... données en grandeur et en direction, l'équilibre s'établira et le polygone funiculaire prendra une figure $P'M'M''$.... qu'on construira facilement. L'effort exercé sur le point fixe B, ou la tension $P^{(n+1)}$ du cordon retenu par ce point, sera facile à déterminer : car cette tension étant donnée par les deux équations de l'article 88, sera exprimée en grandeur et en direction par la résultante de toutes les forces, supposées transportées parallèlement et appliquées en un même point, qu'on peut prendre pour le point fixe. A plus forte raison si les deux extrémités du * Fig. 41.

cordon sont fixes l'équilibre aura-t-il lieu, et le problème de la construction du polygone sera alors indéterminé, à moins toutefois qu'on ne donne quelque autre condition. Si, par exemple, les directions des cordons extrêmes sont données, alors nos deux équations feront connoître leurs tensions P' et $P^{(n+1)}$ ou les pressions (48) des points fixes; on peut à la place de ces équations employer (18) cette construction : on prolongera les cordons extrêmes BM^{iv}, $P'M'$ dont la direction est connue, et on appliquera en leur point de concours O toutes les forces P'', P'''.... parallèlement à leurs directions (88); enfin on cherchera leur résultante, qui, décomposée suivant les cordons extrêmes, fera con-
Fig. 42. noître les pressions P' et $P^{(n+1)}$. De même si un cordon AEB, fixé en deux points A et B, a tous ses points sollicités par des forces quelconques, il prendra la courbure AEB; cherchons le point de concours O des deux tangentes AO et BO, et transportons ces forces parallèlement à leurs directions pour les appliquer en O; en décomposant leur résultante Q en deux autres forces dirigées suivant AO et OB (86), on obtiendra visiblement l'effort exercé sur chacun des points fixes.

90. Ce cas s'applique visiblement à la pesanteur, puisque cette force exerce son action sur tous les points du cordon, actions qui peuvent être assimilées à des poids distribués dans toute la longueur de la corde pesante; la courbe qu'elle forme a été nommée *Caténaire*, *Chaînette* ou *Courbe Funiculaire*. Il est d'abord visible que cette courbe est plane; en effet, soient des puissances verticales P'',
Fig. 43. P''', ... appliquées au cordon $ABCD$, il est visible que ce polygone est dans un plan; car $P'B$, $P''B$ et BC sont dans un même plan : il en est de même de BC, CP''' CD, et de plus ce dernier plan est le même que le premier; ainsi des autres. Les extrémités étant fixes, les cordons

extrêmes ont une direction qu'on peut prendre comme on veut (89), à moins que la longueur du cordon ou toute autre condition ne soit donnée.

Dans la chaînette, les points fixes A et B supportent le poids entier de la corde; les pressions qu'éprouvent ces points sont (48) les deux forces P', P'' qu'il faudroit employer dans les directions des tangentes en A et B, au lieu des points fixes. On peut supposer que la corde perde sa flexibilité et conserve la forme $AEFB$; et puisque P' et P'' détruisent le poids de la corde, la résultante des efforts exercés par la gravité passe par le point O de concours des tangentes extrêmes. Donc le centre de gravité de $AEFB$ est sur la verticale OE: de plus, si on place en O un poids Q égal à celui de la corde, et soutenu par deux fils inextensibles et sans pesanteur AO, BO, les points A et B seront pressés de la même manière qu'ils le sont par l'action de la pesanteur sur la corde; donc les efforts P', P'', exercés en A et B sont proportionnels aux sinus des angles BOE et AOE (18, I), et on les déduit de Fig. 42.

$$\frac{Q}{\sin. AOB}=\frac{P'}{\sin. BOE}=\frac{P''}{\sin. AOE}.$$

Cela doit même avoir lieu, quels que soient les points A et B, puisque l'état d'équilibre permet de considérer comme fixes deux points quelconques pris sur le cours de la courbe. Si donc on regarde le point F comme fixe au lieu du point B, le reste AEF de la courbe ne changera pas de forme; de plus *la tension* P' *exercée en* A *sera encore la même*: pour nous en convaincre, remarquons que comme on peut regarder comme fixe telle partie qu'on veut d'un système en équilibre, on peut, dans la fig. 41, supposer que le point M''' est fixe, sans rien changer à l'état d'équilibre du système; ainsi le

*

polygone $P'M'M''M'''$ conservera la même forme : de plus l'introduction du point fixe en M''' équivaut à celle d'une force qui produiroit l'équilibre ; cette force agiroit donc dans la direction $M''M'''$, et puisqu'elle doit équivaloir aux forces P^{IV}, P^{V}..... supprimées comme inutiles, elle doit faire éprouver à ce cordon la même tension t''' : d'où il suit que t'', et enfin P' sont restés de même grandeur.

Fig. 44. 91. Cherchons l'équation de la courbe AMC formée par une corde inextensible, uniformément grosse, fixée en deux points donnés A et C, et sollicitée dans tous ses points par la gravité. Prenons l'origine en A, l'horisontale Ax pour axe des x, et comptons les y verticalement : pour un point M quelconque, nous aurons $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$. Les tensions exercées en A et en M suivant les deux tangentes AD et MD donnent (18, I)

$$\frac{\text{poids de } AM}{\text{tension en } A} = \frac{\sin . ADM}{\sin . IDF}.$$

Or, observons que comme la tension en A est constante, et que le poids de l'arc AM est proportionnel à sa longueur, le premier rapport est $= \frac{s}{a}$, a étant une constante indéterminée. De plus, $\sin IDF = \frac{dx}{ds}$, $\cos IDF = \frac{dy}{ds}$; en désignant par θ l'angle IAD, on a............. $\sin . ADM = \sin . ADF = \sin . (IDF - IDA)$, ainsi $\sin . ADM = \frac{dx \sin \theta - dy . \cos \theta}{ds}$. Donc on a....

$\frac{s}{a} = \frac{dx . \sin \theta - dy . \cos \theta}{dx}$; d'où on tire

$$sdx = adx \sin \theta - ady \cos \theta \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Telle est l'équation différentielle de la chaînette. Pour éliminer une des variables x, y et s, on différentie, et prenant dx constant, on obtient $-dsdx = bd^2y$, en faisant $b = a\cos\theta$. On déduit de là, en mettant $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ pour ds, $-dxdy = \dfrac{bdyd^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; or dx étant constant, l'intégrale du second membre est visiblement $b.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; celle du premier membre est $-ydx$, et ajoutant à cette dernière pour constante cdx (à cause de l'homogénéité), on a........ $(c-y)\,dx = b.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Or $\dfrac{dy}{dx}$ étant la tangente de l'angle que forme avec l'axe des x la touchante à la courbe en chaque point, si on fait $y=0$, on devra avoir $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\theta$: cette condition donne $c = b\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\theta)} = b.\sec\theta$, d'où $c=a$. Donc

$$dx = \frac{bdy}{\sqrt{[(a-y)^2-b^2]}} \;.....(2).$$

Pour intégrer cette équation on fait $a-y=z$, et on a $dx = \dfrac{-bdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}$: on rend cette fraction rationnelle en supposant, suivant les principes connus...... $\sqrt{(z^2-b^2)} = z-t$; on en déduit z et dz en fonction de t, et on a, en substituant, $dx = b.\dfrac{dt}{t}$; donc

$$x = b.\log t + A = b.\log[z-\sqrt{(z^2-b^2)}] + A;$$

ou enfin

$$x = b\log\left[a-y-\sqrt{(a-y)^2-b^2}\right] + A.$$

Cette équation renferme les trois constantes A, a et b; or 1°. $x=0$, doit donner $y=0$; donc...........

$A = - b . \log [a - \sqrt{(a^2 - b^2)}]$, et

$$x = b . \log \left(\frac{a - y - \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}} \right) \ldots\ldots\ldots (A'').$$

2°. Si on tire de (2) la valeur de $b . \frac{dy}{dx}$ pour la substituer dans (1), on aura l'équation

$$s = a \sin \theta - \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]} \ldots\ldots\ldots (B''),$$

qui donne la longueur de l'arc qui correspond à une ordonnée connue. Si on met les quantités connues AMC et KC pour s et y, cette équation devant être satisfaite, donnera une relation entre a et θ. 3°. Enfin, si on met AK pour x, et KC pour y dans (A''), on aura une nouvelle équation entre a et θ. Ainsi on pourra trouver les valeurs de ces deux constantes. L'équation (A''), dans laquelle les constantes sont maintenant connues, est celle de la chaînette : elle s'étend à tout le cours de cette courbe considérée comme prolongée de part et d'autre vers A' et vers C'.

D'après la théorie des *maxima*, on trouve le point B le plus bas de la courbe en faisant $\frac{dy}{dx} = 0$: cette hypothèse faite dans l'équation (2) donne pour y, $HB = a - b$; l'équation (A'') donne l'abscisse AH de ce point; et (B'') ou (1) donne pour s, $AB = a . \sin \theta$. Il suit de là que pour les valeurs de s qui, telles que AC', sont plus grandes que AB, on devra dans l'équation (B'') faire précéder le radical du signe $+$; de même pour (A'') : et que pour deux points C et C' placés de part et d'autre de B, de manière que $CK = C'K'$, on a $KH = K'H$, $BC = BC'$, et les valeurs de AC et AC' ne diffèrent que par le signe de ce radical.

92. Comme la courbe est symétrique par rapport à BH, on pourroit demander que l'origine fût au point B, et que les abscisses fussent comptées sur la verticale BH; car l'équation seroit plus simple, et plus propre par conséquent à trouver les propriétés de la courbe. En faisant de nouveau les raisonnemens ci-dessus et $BM = s$, nous trouverons l'équation $sdy = cdx$; et comme $ds^2 = dx^2 + dy^2$, on a

$$dx = \frac{sds}{\sqrt{(s^2 + c^2)}}, \text{ d'où}$$

$$x^2 + 2cx = s^2.$$

Ainsi *la chaînette est une courbe rectifiable.* On tire de là $dy = \dfrac{cdx}{\sqrt{(2cx + x^2)}}$ pour l'équation différentielle de cette courbe; et opérant comme précédemment, on aura pour intégrale

$$y = c \log \left\{ \frac{x + c + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c} \right\}$$

On auroit pu arriver à ces divers résultats par une simple transformation de coordonnées; car pour transporter l'origine de A en B, il suffit de faire changer dans les équations du n°. précédent x, y et s en $AH - y$, $HB - x$ et $AB - s$.

C'est une des propriétés les plus remarquables de la caténaire, qu'elle est de toutes les courbes de même longueur et fixées aux extrémités A et C', *celle qui ait son centre de gravité le plus bas.* Nous ne démontrerons pas ici cette propriété, parce qu'elle exige un genre d'analyse trop délicat. Mais il s'ensuit aussi que si on fait tourner l'arc de chaînette ACC' autour de l'horisontale Ax, elle engendrera par sa révolution une surface plus grande que celle qui seroit produite par toute autre courbe de même longueur terminée aux mêmes points C et C'. En effet, le centre de gravité étant dans la chaînette le plus bas possible, la circonférence que décrira ce centre sera aussi la plus longue, et la règle de Guldin donnera (80) pour la surface courbe une plus grande quantité.

Concevons une voûte en équilibre composée de petites sphères qui se touchent, et joignons les centres de ces sphères par des lignes droites. Imaginons ensuite que la direction de la pesanteur de ces sphères change tout-à-coup et se fasse en sens contraire, et que les sphères soient liées ensemble par des fils ou autrement, de manière qu'elles ne puissent pas obéir à l'impulsion verticale de la pesanteur; il est visible que l'équilibre ne sera point troublé, puisque des puissances qui sont en équilibre continuent d'y être lorsque, sans changer ces puissances, on ne fait que leur donner à toutes des directions contraires. Il est visible de plus que dans ce cas la voûte devra former une chaînette, que les *pieds-droits* de cette voûte seront les points fixes, et qu'il n'y aura d'autre différence que dans le renversement de la figure; donc la voûte, pour être en équilibre, devoit avoir la figure de la chaînette.

93. Il résulte de ce qu'on a dit précédemment, qu'on ne peut tendre une corde pesante en ligne droite, si ce n'est verticalement; car le poids de la corde peut être assimilé à une force appliquée au centre de gravité : or, soit ADC le cordon retenu par les deux forces P et Q; soit R le poids de ce cordon, on a

Fig. 45.

$$\frac{P}{R} = \frac{\sin . BDC}{\sin . ADC}.$$

Or, plus la corde est tendue, plus l'angle ADC est grand, et plus aussi BDC approche de l'angle droit; de sorte que pour que la corde soit tendue horisontalement en ligne droite, il faudroit qu'on eût $\frac{P}{R} = \frac{1}{0}$, ou $P = \infty$, tant que R n'est pas nul. Ainsi quelque petite que soit la force R, elle fera courber la corde. C'est ce que l'expérience confirme tous les jours.

94. Soit un cordon ADC fixé en ses extrémités A et C, et passé dans un anneau mobile le long de ce cordon. * Fig. 45.
On voit que cet anneau est assujetti à décrire une ellipse KDL dont A et C sont les foyers, et $AD + DC$ le grand axe KL : si donc une puissance R agit sur l'anneau à l'aide du cordon BD, elle devra être normale à cette ellipse (97), pour que l'équilibre ait lieu, c'est-à-dire que BD devra diviser l'angle ADC formé par les rayons vecteurs en deux parties égales; d'où il suit que les tensions P et Q des cordons AD et DC doivent être égales. Si donc deux forces P et Q agissent à l'extrémité d'un cordon ADC, passé dans un anneau ou nœud coulant D, retenu par une force R, voici les conditions de leur équilibre: 1°. la droite DB doit diviser l'angle ADC en deux également, et 2°. les forces P et Q doivent être égales. Il résulte de là que si une corde, aux extrémités de laquelle deux forces P' et $P^{(n+1)}$ agissent, est courbée sur un polygone solide $P'M'M''M'''$.... il faut, pour qu'il y ait Fig. 41.
équilibre, que ces deux forces soient égales; car on peut regarder les angles M', M''... du polygone comme autant d'anneaux fixes.

Soient A et B les deux points de suspension d'un Fig. 45 *bis*.
cordon AEB auquel est attaché un poids Q, ayant un nœud coulant ou un anneau en son point d'attache E avec le cordon : cherchons les conditions d'équilibre de ce système, dont on trouve un exemple dans les *Réverbères* destinés à éclairer les rues.

Menons l'horisontale AC et la verticale CBH, AC et CB sont connus, ainsi que la longueur AEB du cordon $= h$. Puisque QEG partage l'angle AEB en deux parties égales, les angles H et GEB sont égaux : ainsi le triangle EBH est isocèle, et $HE = EB$, enfin $AH = h$. Donc si de A comme centre et d'un rayon $= h$, on trace un arc de cercle, il coupera CH au point H, tel que la perpendiculaire EF, élevée sur le milieu de BH, déterminera le point E de suspension du poids Q : cette construction résout donc graphiquement le problême proposé. On peut en trouver aisément une solution analytique.

II. *De l'équilibre d'un corps qui ne peut se mouvoir que sur une ligne, ou une surface et en particulier sur un Plan incliné.*

* 95. Il est évident qu'une force N, de direction perpendiculaire à un plan AB, sollicitant un point matériel, est entièrement détruite par la résistance du plan, puisqu'il n'y a pas de raison pour que ce point se meuve dans un sens plutôt que dans un autre. Réciproquement, pour qu'une force unique sollicitant un point matériel sur un plan le laisse immobile, il faut qu'elle soit de direction perpendiculaire à ce plan ; car si cette force étoit comme P'', dirigée obliquement, on pourroit la décomposer en deux autres, l'une dans le sens même du plan, et l'autre de direction perpendiculaire au plan; la première pouvant produire entièrement son effet, le point obéiroit à son action, ce qui est contre l'hypothèse.

Fig. 46.

* Donc un corps pesant, placé sur un plan, n'y peut être en équilibre que lorsque ce plan est horisontal, puisque la direction de la gravité est verticale.

* Donc aussi pour qu'un systême de forces retienne un point matériel en équilibre sur un plan, il est nécessaire

et il suffit que *la résultante de ces forces soit perpendiculaire à ce plan*. Si donc on prend ce plan pour celui des xy, et si on cherche la résultante de toutes les forces, comme il a été dit (24), les équations (I) de la résultante devront être réduites à $x = x'$ et $y = y'$: ainsi il y a deux conditions $X = 0$, $Y = 0$.

Comme on n'a le plus souvent que deux forces P' et P'', * il convient d'examiner ce cas en particulier : comme il faut que leur résultante soit perpendiculaire au plan, on voit d'abord que *le plan des forces doit être perpendiculaire au plan donné*. De plus, si on décompose chaque force en deux, l'une dans le sens du plan, et l'autre qui lui soit perpendiculaire, il faut que les deux composantes dans le sens du plan soient *opposées* et *égales*. De ces deux conditions, la première est satisfaite, puisque le plan des forces est perpendiculaire au plan donné : quant à la seconde, soit la figure 46 le plan des forces, et AB son intersection avec le plan donné. Nommons θ' et θ'' les angles que forment les directions des forces avec ce plan : les composantes qui lui sont perpendiculaires (18, V) sont $P' \sin\theta'$ et $P'' \sin\theta''$; on a pour les composantes dans le sens du plan $P' \cos\theta'$ et $P'' \cos\theta''$; donc

$$P' \cos\theta' = P'' \cos\theta'' \ldots\ldots\ldots (C'').$$

Ainsi il faut ici pour l'équilibre *deux conditions*; la * première exige que le plan des forces soit perpendiculaire au plan donné; la seconde est renfermée dans l'équation (C''). Quant à la pression qu'éprouve le plan, elle est la somme des composantes qui lui sont perpendiculaires : soit N cette pression, on a

$$N = P' \sin\theta' + P'' \sin\theta''.$$

En mettant pour P'' sa valeur $\dfrac{P' \cos\theta'}{\cos\theta''}$, et observant que $\sin\theta'' . \cos\theta' + \cos\theta'' \sin\theta' = \sin(\theta' + \theta'')$, on trouvé pour la valeur de la pression dans le cas d'équilibre.

$$N = P' . \frac{\sin(\theta' + \theta'')}{\cos\theta''} \ldots\ldots\ldots\ldots (D'').$$

* 96. Appliquons cette théorie à la pesanteur. On appelle PLAN INCLINÉ celui qui forme avec un plan horisontal un angle quelconque, et l'inclinaison se mesure par cet angle: c'est celui que forment entre elles deux droites menées dans chacun de ces plans par un point quelconque de leur ligne d'intersection, perpendiculairement à cette ligne. Puisque l'une des deux forces est ici verticale, et que l'équilibre a lieu, le plan des forces est vertical, et de plus, perpendiculaire au plan incliné : ainsi il doit couper ce plan, et le plan horisontal suivant deux droites AB et AC,
Fig. 46. formant entre elles l'angle même des deux plans. Soit M le point matériel pesant; si on abaisse une verticale BC d'un point B de la ligne AB, elle sera contenue dans le plan de la figure qui est vertical : on nomme AC la *base*, BC la *hauteur*, et AB la *longueur* du plan incliné. Soient donc deux forces, l'une P' de direction verticale, représentant le poids du point mobile M, l'autre P'' destinée à retenir ce poids en équilibre sur le plan incliné : désignons par ι l'angle d'inclinaison A. Puisque $P'M$ est, par hypothèse, perpendiculaire sur AC, dans le triangle MAD on a $\cos\theta' = \sin\iota$, et l'équation (C'') devient

$$P' \sin\iota = P'' \cos\theta'' \ldots\ldots\ldots (E'').$$

Mais outre cette condition, il faut que le plan vertical conduit suivant P'' soit perpendiculaire au plan incliné.

* Quant à la pression qu'éprouve le plan incliné, la valeur (D'') devient

$$N = \frac{P'}{\cos \theta''} \times \cos (\iota - \theta'') \ldots\ldots\ldots (F'').$$

En rapprochant cette expression de l'équation (E''), on a

$$\frac{P'}{\cos \theta''} = \frac{P''}{\sin \iota} = \frac{N}{\cos (\iota - \theta'')} \ldots\ldots\ldots (G'').$$

Ainsi le poids, la puissance et la pression sont respectivement proportionnels aux cosinus des angles formés par la direction de la puissance avec le plan incliné, par ce plan avec la verticale, et par la puissance avec l'horison.

La formule (G'') tient lieu des deux équations (E'') et (F''), et on voit que, d'après les principes d'algèbre, *étant donné trois des cinq quantités suivantes, le poids, la puissance, sa direction, la pression et l'inclinaison du plan, on peut toujours trouver les deux autres.*

Parmi toutes les directions qu'on peut donner à la puissance P'', il y en a deux qui conduisent à des résultats remarquables.

1°. Si P'' agit horisontalement, on a $\theta'' = \iota$, et la formule (E'') devient $P' \sin \iota = P'' \cos \iota$: on a donc les deux équations

$$P'' = P' \operatorname{tang} \iota, \text{ et } N = \frac{P'}{\cos \iota} \ldots\ldots (H'').$$

Or, dans le triangle rectangle ABC, on a $\operatorname{tang} \iota = \frac{CB}{AC}$; donc

$$\frac{P'}{P''} = \frac{AC}{BC}.$$

Ainsi le poids du corps est à la force horisontale employée à le retenir en équilibre sur un plan incliné, comme la base de ce plan est à sa hauteur.

Quant à la pression N, sa valeur $\frac{P'}{\cos \iota}$ fait voir qu'on a $N > P'$, c'est-à-dire la pression plus grande que le poids du corps. Si le plan AB étoit horisontal, on auroit $\iota = 0$, d'où $N = P'$, ce qui est évident : et si ce plan étoit vertical, ι seroit un quadran, d'où $\cos \iota = 0$, et par conséquent $N = \infty$: P'' devient alors perpendiculaire au plan.

2°. Si la force P'' agit dans le sens du plan AB, on a $\iota'' = 0$; nos formules deviennent donc $P'' = P' \sin \iota$, $N = P' \cos \iota$: comme le triangle ABC donne $\sin \iota = \frac{BC}{AB}$, la première devient $\frac{P'}{P''} = \frac{AB}{BC}$; ce qui prouve que *le poids du corps est à la force parallèle au plan incliné, dans le cas d'équilibre, comme la longueur du plan est à sa hauteur.* D'ailleurs on a toujours $N < P'$; si le plan est horisontal, $\iota = 0$ donne $P' = N$, ou la pression égale au poids, et $P'' = 0$; ce qui est d'ailleurs évident.

Toute la théorie du plan incliné repose, comme on voit, sur les équations générales (C'') et (D'') : d'ailleurs on auroit pu démontrer directement tous les théorêmes précédens, en appliquant immédiatement au cas de la pesanteur les raisonnemens généraux qui nous ont conduits aux valeurs (C'') et (D'').

97. Si le point mobile est sur une courbe ou sur une surface courbe, en considérant la tangente, ou le plan tangent mené au point où le mobile est placé, on peut y appliquer ce qu'on a dit (95); ainsi la force qui sollicite un point mobile ne peut le laisser en équilibre sur cette courbe ou sur cette surface courbe, qu'autant qu'elle est dirigée suivant la normale. Nous ne dirons rien ici de l'équilibre sur une surface courbe, ou sur une courbe à double courbure, on peut consulter à cet égard la *Mécanique philosophique*, numéros 95 et 96.

Soit une courbe plane DZ, dont $y = fx$ est l'équation, Fig. 47.
$AP = x$, $PM = y$; et un point M sollicité par un nombre quelconque de forces : cherchons la condition d'équilibre. Nommons X et Y les sommes de composantes respectivement parallèles aux axes des x et des y (23). La tangente en M fait avec l'axe des x un angle dont le sinus est $\frac{dy}{ds}$, et dont le cosinus est $\frac{dx}{ds}$, s représentant l'arc de courbe DM. Or, on a pour les composantes de X et Y dans le sens de

$$\text{La tangente}\ldots\ldots X.\frac{dx}{ds},\ Y.\frac{dy}{ds}.$$

$$\text{La normale}\ldots\ldots X.\frac{dy}{ds},\ Y.\frac{dx}{ds}.$$

Il devra y avoir égalité entre les composantes dans le sens de la tangente, et la pression N sera la somme des deux autres composantes : donc

$$Xdx = Ydy, \text{ et } Nds = Xdy + Ydx \ldots\ldots (I'').$$

La première de ces équations fera connoître l'une des forces X ou Y; ou donnera l'équation différentielle de la courbe DZ lorsque ces forces seront connues, pour que l'équilibre ait lieu en un point quelconque M. Si la courbe DZ étoit donnée, ainsi que les forces X et Y, cette équation entre x et y serviroit à trouver les coordonnées du point où l'équilibre a lieu sur la courbe. Ainsi, soient des puissances données sollicitant un point matériel enfermé dans un canal curviligne; d'un point à l'autre la tangente variant d'inclinaison, les composantes dans le sens de cette tangente doivent aussi varier : l'équation précédente, combinée avec celle de la courbe, servira à faire connoître l'x et l'y du point de cette courbe où l'équilibre doit avoir lieu.

Si on met pour ds et $\frac{dy}{dx}$ leurs valeurs $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, et $\frac{X}{Y}$ dans la seconde équation, on trouvera..... X [illegible] $\sqrt{(X^2+Y^2)}$, ce qui est d'ailleurs évident, car (18, V) la résultante de X et de Y est $=\sqrt{(X^2+Y^2)}$.

Si on prenoit pour l'équation de la ligne DZ celle d'une ligne droite, c'est-à-dire $y=ax+b$, les équations précédentes feroient trouver de nouveau les théorêmes 95 et 96 : nous ne nous arrêterons pas à faire ces calculs, qui n'ont aucune difficulté.

98. Il convient pour l'intelligence complette de cette théorie d'en faire quelques applications ; nous prendrons le cas du cercle. Lorsque le centre est à l'origine, et que le rayon est r, on a $x^2+y^2=r^2$, d'où $dx=-\frac{y}{x}dy$, ce qui change la première des équations (I^a) en.. $Xy + Yx = 0$.

Si donc un poids p est placé dans un canal circulaire et si on demande le lieu où il sera en équilibre lorsque la gravité seule agira sur lui, on trouve que $X=0$, $Y=-g$ (lorsque l'axe des y est vertical) : d'où $-gx=0$; ainsi le point cherché a pour coordonnées $x=0$, $y=\pm r$; ce qui signifie qu'il n'y a que les deux extrémités du diamètre vertical qui conviennent à l'équilibre : vérité conforme à ce qui est d'ailleurs connu.

Fig. 10. Soit en M un mobile pesant retenu par un fil CM au point fixe C, et repoussé par une force agissante en A suivant la direction de la corde AM, en raison inverse du carré de la longueur de cette corde. Le mobile, dont g désigne le poids, est assujetti à rester sur la circonférence;

$Cp = x$, PM est vertical et $= y$. Soit F l'intensité de la force répulsive lorsque la distance AM est l'unité; elle sera $\frac{F}{z^2}$ lorsque $AM = z$: cette force fait avec l'axe des x un angle dont le triangle AMN donne le cosinus $= \frac{x}{z}$ et le sinus $= \frac{r-y}{z}$; ainsi les composantes sont $X = \frac{Fx}{z^3}$, $Y = \frac{F(r-y)}{z^3} - g$, et l'équation $Xy + Yx = 0$ devient

$$Fr = gz^3.$$

Puisqu'on a $z^2 = x^2 + (r-y)^2 = 2r(r-y)$ on pourra en conclure les coordonnées x et y du point où le mobile devra s'arrêter : mais il est clair que l'équation $Fr = gz^3$ suffit à cet objet puisqu'elle donne z en fonction de grandeurs connues. Si on considère une autre force F' appliquée au même appareil elle donnera $F'r = gz'^3$, d'où $\frac{F}{F'} = \frac{z^3}{z'^3}$, ainsi les forces répulsives sont entre elles comme les cubes des distances auxquelles elles soutiennent le poids du corps. La seconde des équations (I'') donneroit de même la tension N qu'éprouve le fil CM.

On a un exemple de ce système dans l'*Électromètre :* on sait que si A et M sont deux corps électrisés de la même manière, on développe en eux une force répulsive d'autant plus grande qu'il y a plus d'électricité accumulée en A. On pourra donc, à l'aide de l'analyse précédente, déterminer par expérience l'intensité de la force F pour chaque cas, et, par conséquent, comparer des expériences faites avec des électromètres différens.

Supposons, pour dernier exemple, que dans le système précédent le corps M soit sans pesanteur, mais que la Fig. 48.

force répulsive de A soit détruite par une puissance qui tendroit à ramener M vers A, et qui seroit proportionnelle à un arc BM compris entre un point fixe B et le lieu M où l'équilibre s'établit. C'est ce qui arrive lorsque le corps M non pesant, est en repos au point B, et qu'ensuite la force répulsive de A tend à le porter en D tandis qu'un ressort pressant CM tend au contraire à le ramener vers B : en vertu de ces deux actions combinées, le mobile se tient en équilibre au point M; le ressort étant d'ailleurs supposé une force proportionnelle à l'arc décrit BM.

Nous conserverons les dénominations précédentes ; de plus, nous ferons $ACM = \theta$, $ACB = \iota$, et nous représenterons par T l'intensité de la force du ressort pour un arc dont la longueur seroit $= 1$: du reste ce ressort est assimilable à une force qui agit suivant la tangente en M, qui fait avec l'axe des x l'angle $\theta = MCA$, et cette force $= T(\theta - \iota)$; comme $\cos\theta = \dfrac{y}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{x}{r}$, les composantes sont $T(\theta-\iota)\,.\,\dfrac{y}{r}$ et $T(\theta-\iota)\,.\,\dfrac{x}{r}$; de sorte qu'on a pour l'équation $Xy + Yx = 0$

$$\left(\frac{Fx}{z^3} - \frac{T(\theta-\iota)y}{r}\right)y + \left(\frac{F(r-y)}{z^3} - \frac{T(\theta-\iota)x}{r}\right)x = 0,$$

ou
$$F = \frac{T}{x}(\theta-\iota)\,z^3.$$

Il peut arriver que le point B coïncide avec A, c'est-à-dire que A soit le point même où la force du ressort est nulle, alors $\iota = 0$, et on a simplement

$$F = \frac{T\theta z^3}{x}.$$

Nous nous bornerons à ce dernier cas, qui est celui qu'on emploie ordinairement. Il convient d'éviter, dans cette formule, l'emploi de plusieurs variables : ainsi nous remarquerons que dans le triangle CMN, on a $x = r \sin \theta$ et $y = r \cos \theta$, d'où $z^2 = 2r(r - y) = 2r^2(1 - \cos \theta)$ ou $z = 2r \sin \frac{1}{2}\theta$: de sorte que

$$F = 8\, Tr^2 . \frac{\theta \sin^3 \frac{1}{2}\theta}{\sin \theta};$$

une autre force F' comparée à celle-ci donne donc

$$\frac{F}{F'} = \frac{\theta \sin^3 \frac{1}{2}\theta . \sin \theta'}{\theta' \sin^3 \frac{1}{2}\theta' . \sin \theta};$$

c'est la formule que Biot a donnée dans les *Annales de chimie*.

On applique cette analyse à la *Balance électrique* de Coulomb, dont voici l'usage. Le plan de la fig. 48 est horizontal ; CM est une aiguille suspendue à un fil métallique vertical, c'est-à-dire perpendiculaire en C à la figure : cette aiguille porte en M un disque métallique isolé, sur lequel agit le fluide électrique condensé en A, et de même nature que celui du disque ; ainsi il y a répulsion ; ce qui force l'aiguille, originairement en BC, de tourner autour de C, et par conséquent de tordre le fil vertical, jusqu'à ce que la force répulsive étant diminuée par l'augmentation de la distance, et au contraire la force élastique du fil métallique étant augmentée avec la torsion, l'équilibre s'établisse en CM. Or l'expérience prouve que cette dernière force est proportionnelle à l'angle de torsion, c'est-à-dire à l'angle BCM décrit par l'aiguille CM. Ainsi les formules précédentes peuvent être appliquées. On s'en sert pour vérifier si en effet la force répulsive décroît, comme on l'a supposé, en raison du carré de la distance ; c'est du moins ainsi que Coulomb

s'est assuré de cette vérité importante; seulement, comme il n'avoit fait ses expériences que sur des arcs très-petits, la formule s'est simplifiée; car les sinus étant égaux aux arcs, $x = z = \theta r$, et on a simplement, suivant que B est d'abord distant de A, ou confondu avec ce point,
$\frac{F}{F'} = \frac{(\theta - \iota)\theta^2}{(\theta' - \iota)\theta'^2}$ ou $\frac{F}{F'} = \frac{\theta^3}{\theta'^3}$. Nous ne pouvons développer davantage ici ces théories pour lesquelles nous renvoyons aux *Traités de physique* de Haüy, n°. 535, et de Fischer, pag. 245 et 257. Nous ajouterons seulement que, quoique nous n'ayons ici envisagé que le cas de la répulsion, cependant celui où les deux corps auroient des électricités différentes, et par conséquent s'attireroient, y est implicitement compris.

Fig. 49. 99. Soient deux points matériels m, m', disposés sur deux plans inclinés adossés AC, CB (ainsi qu'on le voit fig. 49), et unis par un fil inextensible mCm', passé dans la gorge d'une poulie C: on demande les conditions d'équilibre de deux forces P, P', agissant sur ces points, et formant avec les plans AC et BC les angles θ et θ'.

Les pressions exercées sur les plans sont les composantes perpendiculaires $P \sin \theta$, $P' \sin \theta'$; mais elles ne se cumulent pas comme précédemment. Pour qu'il y ait équilibre à l'aide de la poulie C, d'après ce qu'on verra (107), il faut que les composantes dans le sens des plans soient égales. On a donc $P . \cos \theta = P' . \cos \theta'$.

Si les forces P et P' sont verticales, en nommant ι et ι' les angles formés par les plans avec la base horisontale AB, on a $\cos \theta = \sin \iota$, et $\cos \theta' = \sin \iota'$, ainsi $P . \sin \iota = P' . \sin \iota'$, ou

$$P \times \frac{CD}{AC} = P' \times \frac{CD}{CB}, \text{ ou enfin } \frac{P}{P'} = \frac{AC}{CB}.$$

Ce cas a lieu quand les forces P et P' sont les poids des deux corps m et m'. Ainsi *deux poids en équilibre sur deux plans inclinés, sont entre eux comme les longueurs de ces plans.*

100. Soient deux poids m, m', placés sur les courbes AF et EB, et attachés au fil mCm' passé dans la gorge de la poulie infiniment petite C; cherchons deux courbes AF et EB telles que l'équilibre subsiste entre ces poids, quelles que soient d'ailleurs leurs positions respectives sur ces courbes. Fig. 50.

Menons la verticale CN par le point C; et supposons que les équations des deux courbes, rapportées à cette ligne comme axe, soient $y = fx$ pour la courbe AF; $y' = Fx'$ pour la courbe EB : le point C étant d'ailleurs pris pour origine commune des x et des x'. Cela posé, nommons a la longueur mCm' du fil; faisons $Cm = z$, $Cm' = z'$; nous aurons

$$z + z' = a,\ z^2 = x^2 + y^2,\quad z'^2 = x'^2 + y'^2 \ldots (1).$$

Le poids m est une force qui agit dans la direction verticale mb; en représentant cette puissance par mb, et formant (17) le parallélogramme $mdbc$, elle sera décomposée en deux autres, l'une md agissant dans le sens du fil Cm; l'autre mc dirigée dans le sens de la normale mN. Or, on a

$$CN = x + \text{sounorm.} = \frac{xdx + ydy}{dx} = \tfrac{1}{2}.\frac{d(x^2+y^2)}{dx} = \frac{zdz}{dx};$$

d'ailleurs les triangles semblables mdb, CmN donnent

$$\frac{md}{mb} = \frac{Cm}{CN};\ \text{donc}\ md = \frac{mdx}{dz}.$$

En opérant de la même manière pour le poids m'', on a

$\frac{m'dx'}{dt}$ pour sa composante dirigée suivant Cm' : ces deux composantes doivent être égales dans le cas d'équilibre (10°). Or l'équation $z + z' = a$ donne $dz = - dz'$; donc

$$mdx - m'dx' = 0, \text{ ou } mx - m'x' = A \ldots (2).$$

Ce résultat fait voir que quelque position que l'on fasse prendre aux poids m et m', le centre de gravité de leur système doit toujours rester sur la même ligne horizontale : car d'après les équations (A), la distance de ce centre à l'horizontale GH est $\frac{mx + m'x'}{m + m'}$, valeur qui, à cause de l'équation (2), devient $\frac{A}{m - m'}$ = constante.

Lorsque la courbe AF sera donnée, et qu'on voudra trouver la courbe EB, propre à l'équilibre, il ne s'agira que de joindre aux équations (1) et (2), celle de AF, et d'éliminer entre cinq équations, qui contiennent les six variables $x, y, z; x', y', z'$: afin d'obtenir une relation entre x' et y'. La constante arbitraire A sera déterminée d'après la considération du point E où la courbe BE rencontre la verticale CY : ou d'après la position donnée d'un point quelconque de cette courbe.

Si, par exemple, la ligne AF est droite, et si la poulie
Fig. 49. C est placée, comme dans la figure 49, en son point de rencontre avec la verticale CD, en nommant i l'angle qu'elle fait avec l'horison, l'équation $y = fx$ devient ici $y . \text{tang}\, i = x$. Pour éliminer, reprenons les deux premières équations (1), et mettons $\frac{x}{\text{tang}\, i}$ pour y : elles donneront $z = a - z'$, et $z = \frac{x}{\sin i}$; égalant ces deux valeurs, on en tire $x = (a - z') \sin i$, ce qui change la valeur (2)

en $m(a-z')\sin\varepsilon+m'x'=A$. Si on veut que la courbe cherchée passe en C, il faut que x' et z' soient nuls en même tems, ce qui donne $A=ma\sin\varepsilon$; donc on a

$$m'x'=mz'\sin\varepsilon.$$

Enfin élevant au carré, et mettant $x'^2+y'^2$ pour z'^2, on trouve

$$y'=x'.\sqrt{\left(\frac{m'^2-m^2\sin^2\varepsilon}{m^2\sin^2\varepsilon}\right)}$$

pour l'équation de la ligne cherchée. Elle conduit d'ailleurs au résultat énoncé n°. 99: car il est clair que cette ligne est droite; et comme en nommant ε' l'angle qu'elle fait avec l'horison, son équation doit être $y'=x'.\frac{\cos\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}$; en comparant cette équation à la précédente, on en déduit $m\sin\varepsilon=m'\sin\varepsilon'$.

101. Un point matériel est en équilibre sur un plan lorsque la résultante des forces qui le sollicitent est perpendiculaire à ce plan : mais s'il s'agit d'un corps, cette condition n'est plus suffisante; en effet une force perpendiculaire à un plan, n'est détruite que parce qu'on la suppose appliquée en son point même de rencontre avec ce plan. Lorsqu'il s'agit d'un corps, cette hypothèse n'est permise qu'autant que ce point fait partie du corps (13), c'est-à-dire est un de ceux de sa base en contact avec le plan. Si le corps ne pose sur le plan que par différens points, comme une table portée par des pieds, pour que la force perpendiculaire soit détruite, il faut qu'on puisse la décomposer en d'autres qui lui soient parallèles et qui passent par ces points; ce qui exige visiblement que le point de rencontre de cette force avec le plan, tombe dans l'intérieur du polygone qu'on forme en joignant ces points par des droites : car, sans cela, on ne

car en regardant cette droite comme axe des x ou des y, l'une des équations ci-dessus devient inutile.

103. Soit un corps pesant placé en équilibre sur deux plans inclinés : cet état ne peut exister qu'autant que la résistance de ces plans détruit le poids du corps : si donc chacun d'eux ne rencontre le corps qu'en un point, et si on leur élève en ces points des perpendiculaires, elles se couperont en un des points de la verticale passant par le centre de gravité, afin que le poids du corps puisse être décomposé en deux autres forces de directions perpendiculaires aux plans : les composantes seront les pressions exercées sur ces plans. Il résulte de là que *le plan qui passe par les appuis et par le centre de gravité, doit être vertical; ou de plus perpendiculaire aux deux plans inclinés, ou à leur intersection qui sera par conséquent horisontale.*

Tout ce que nous venons de dire n'est pas particulier au cas d'un corps sollicité uniquement par la gravité; et s'il y avoit dans le système des forces quelconques, il faudroit dire de leur résultante ce qu'on vient d'exposer sur la verticale passant par le centre de gravité.

Fig. 51. Le plan de la fig. 51 est supposé être celui des pressions; K et I sont les appuis; les pressions ont pour directions KO et OI perpendiculaires aux plans inclinés AB et BC, elles concourent en O sur la verticale OP qui passe par le centre de gravité G du corps KGI : UZ est un plan horisontal passant par l'intersection B des plans inclinés. Menons l'horisontale HI; représentons le poids du corps par P et les pressions qu'éprouvent les plans par Q et T; enfin par ψ, θ et ε l'angle que les plans forment entre eux et ceux qu'ils font avec l'horison. Pour obtenir les pressions, il faut concevoir le poids P du corps comme une force verticale appliquée en O, et la décomposer en deux autres dirigées suivant OK et OI : et comme ces lignes

ne sont pas perpendiculaires, on doit avoir recours au théorême (18, I) qui s'applique à ce cas. Or les forces P, Q et T le sont aux côtés du triangle HBI; on peut donc remplacer les angles que ces forces forment entre elles par ceux de ce triangle, c'est-à-dire par ψ, ι et θ; ce qui donne

$$\frac{P}{\sin\psi}=\frac{Q}{\sin\iota}=\frac{T}{\sin\theta}, \ldots\ldots (K'')$$

d'où on tire les valeurs des pressions Q et T.

Si le corps GKI touchoit les plans en plusieurs points, l'aire comprise contiendroit le centre de pression pour lequel la théorie ci-dessus a lieu. C'est ce qui arrive pour l'équilibre des parties d'une voûte, et pour la pression exercée par chacune d'elles sur ses voisines, c'est-à-dire par les *Voussoirs* les uns sur les autres. Voyez à cet égard l'*Architecture hydraulique de Prony*, et le Coin (121).

III. *Du Levier.*

104. On appelle LEVIER un corps (45) retenu par un axe fixe, et sollicité par des forces quelconques : tout ce qui a été dit dans le paragraphe 45 doit ici recevoir son application; ce qui résout le problême du levier dans l'état le plus général. Mais comme ce systême se rencontre moins souvent que celui qui ne contient que deux forces, nous examinerons ici en particulier le levier composé simplement d'une verge inflexible, sollicitée par deux puissances, et retenue en un point fixe. *

Soient P', P'' les deux forces; BAC un levier non pesant : il est clair que les forces ne peuvent être en équilibre qu'autant qu'elles ont leur résultante détruite par la résistance de l'appui; ainsi ces puissances sont dans le même plan, et leur résultante doit passer par le point fixe. * Fig. 51.

* Cette double condition est nécessaire pour l'équilibre, or la dernière peut être exprimée analytiquement ; car on sait (27) que le moment de la résultante des deux forces P' et P'' doit être égal à la somme des momens de ces forces : si donc on prend ces momens par rapport au point fixe A qui est sur la direction de la résultante, le moment de cette résultante sera nul ; de sorte que faisant $AN = p'$, $AM = p''$, on aura donc $P'p' + P''p'' = 0$. Les momens devront donc être égaux et de signes contraires, ou, si on veut, *les forces devront tendre à faire tourner le levier autour de son appui dans des sens différens, et leurs momens seront égaux par rapport à cet appui.*

* Ce théorème est général quelles que soient les forces, leurs directions et leurs dispositions par rapport à l'appui, puisque dans tous les cas les raisonnemens ci-dessus sont applicables. De plus, l'équation $P'p' = P''p''$ suffit pour exprimer l'équilibre, en observant toutefois que les forces soient dans le même plan et tendent à faire tourner en sens contraire : car alors la résultante passe visiblement par l'appui fixe. Comme on appelle *bras de levier* (45) la distance d'une force à l'appui, on peut donc dire aussi que les forces sont *en raison inverse de leurs bras de levier.*

* Si les forces sont parallèles, le principe ci-dessus peut
Fig. 19. aussi s'appliquer puisqu'on sait qu'alors (34) le théorème des momens a encore lieu. Seulement lorsque la verge EG est droite, comme les distances des forces à l'axe sont proportionnelles aux longueurs EF et FG, on peut regarder ces longueurs comme étant les bras de levier.

* Quant à la pression exercée sur l'axe fixe, elle est la résultante des forces P', P'' ; et on la détermine aisément.

* Du reste on peut regarder comme inconnue l'une des puissances ou l'un des bras de levier, et l'équation. . .

$P'p' = P''p''$ sert à résoudre les divers problêmes qu'on peut se proposer à cet égard.

Quelquefois le levier n'est que posé sur l'axe fixe : alors pour qu'il ne glisse pas sur cet axe, il faut que la résultante soit normale au levier (95). *

On distingue trois espèces de levier suivant les dispositions respectives de l'appui, de la puissance et de la résistance. Dans les leviers du premier genre, l'appui est entre la puissance et la résistance; tels sont les balances, la romaine, les ciseaux..... Dans les leviers du deuxième genre, la résistance est au milieu; on en trouve des exemples dans les barres employées à soulever les pierres, dans les rames de bateau, qui trouvent leur appui dans l'eau, etc. Enfin la puissance est entre l'appui et la résistance dans les leviers du troisième genre; les pincettes en sont un exemple, aussi bien que nos organes de mouvement; les muscles en se raccourcissant, rapprochent leurs points d'attache, qui sont voisins des articulations autour desquelles y a un mouvement de rotation. *

105. Ayons maintenant égard à la pesanteur de la verge qui sert de levier : soient P' et P'' deux forces; p' et p'' les perpendiculaires abaissées du point fixe A sur leurs directions; I' et I'' les centres de gravité des branches AB et AC, dont on considère les poids Q' et Q'' comme deux nouvelles forces appliquées à ces centres : q' et q'' les distances de l'appui A aux verticales $I'Q'$, $I''Q''$; en raisonnant comme précédemment, on verra qu'on a quatre forces dont les momens, par rapport au point fixe A, doivent être égaux : la condition d'équilibre est par conséquent exprimée par l'équation *
Fig. 52.

$$P'p' + Q'q' = P''p'' + Q''q'' \ldots\ldots (L'').$$

On a souvent deux puissances M et P verticales, dont

Fig. 53. m et p sont les bras de levier : la balance appelée *Romaine* est dans ce cas ; cette machine, composée d'un *fléau* retenu par un axe fixe, sert à peser tous les corps qu'on suspend à l'un de ses bras à l'aide d'un poids constant qu'on applique à l'autre bras, à une distance convenable de l'axe.

Ces sortes d'instrumens portent des divisions à la branche sur laquelle glisse le poids constant, pour s'approcher ou s'éloigner de l'axe, jusqu'à ce que le fléau soit horisontal : et l'aspect de ces divisions fait juger sur-le-champ du poids du corps qui est suspendu à l'autre bras. Voici la théorie d'après laquelle ces divisions sont marquées. Soient
Fig. 53 bis. M', M''.... les divers poids qu'on suspend successivement en B ; m, p', p''.... leur distance à l'axe, et celle du poids constant P qui leur fait équilibre : Q', Q'' les poids des bras du fléau ; q', q'', les distances de leurs centres de gravité à l'axe. L'équation (M'') donne

$$\left.\begin{array}{l} M'm + Q'q' = Pp' + Q''q'', \\ M''m + Q'q' = Pp'' + Q''q'', \\ M'''m + Q'q' = Pp''' + Q''q'', \text{ etc.} \end{array}\right\}\ldots\ldots(M'')$$

En retranchant successivement la première de ces équations de la seconde, la deuxième de la troisième, etc., on en déduit

$$p'' - p' = \frac{M'' - M'}{P} \times m,$$

$$p''' - p'' = \frac{M''' - M''}{P} \times m, \text{ etc.}$$

Si les poids M', M''.... sont en progression arithmétique, on a $M'' - M' = M''' - M'' =$ etc., d'où $p'' - p' = p''' - p'' =$ etc., les divisions sont donc égales entre elles : et si on veut qu'elles soient de plus égales au plus petit bras, c'est-à-dire $= m$, on aura $p'' - p' = m$, d'où $P = M'' - M'$; alors P n'est plus arbitraire.

On construit ordinairement cet instrument de manière à ce qu'il soit en équilibre, sans les poids $M' \ldots\ldots P$. On a alors $Q'q' = Q''q''$; d'où on conclut $M'm = Pp'$; et dans le cas où on veut que les divisions soient $= m = p'$, on a $M' = P = M'' - M'$; d'où $M'' = 2\,M'$. Ainsi le poids constant P fera successivement équilibre à des poids M', $2\,M'$, $3\,M' \ldots$ puisque M' est la raison de la progression.

106. La *Balance* ordinaire est un levier du premier * genre, dont les deux bras ou *fléaux* AE, EB sont Fig. 54. égaux; les forces en équilibre doivent donc aussi être égales. L'un des *bassins* C porte la substance qu'on veut peser; l'autre contient le poids D qui lui fait équilibre. Une aiguille gy, perpendiculaire à la direction du levier, est fixée au-dessus de l'axe de suspension; cet axe est lui-même soutenu par deux couteaux x et y, sur une *chappe* Mf verticale; les directions de l'aiguille et de la chappe doivent coïncider dans le cas d'équilibre. Il est inutile d'insister sur une machine aussi simple, et d'un usage aussi familier : mais il est à observer que si les bras de levier ne sont pas égaux, les poids ne peuvent pas l'être non plus, et la balance est fausse. Il est aisé de reconnoître la supercherie; car en changeant les poids de bassin, celui qui est le plus foible aura un bras de levier plus court, et il n'y aura plus d'équilibre.

Quoiqu'une telle balance paroisse peu propre à peser, on peut cependant s'en servir avec avantage; et l'un des moyens que nous allons indiquer à cet effet, doit être employé dans toutes les opérations où on veut obtenir des résultats très-justes, même lorsque les balances sont exactes, parce qu'on sent assez que cette exactitude n'a lieu qu'à-peu-près. Soit Y le poids inconnu; on le mettra en équilibre avec un autre poids P; puis ôtant Y du bassin on lui substituera un poids Q qui fasse aussi équilibre à P; on aura donc $Y = Q$. On peut encore opérer comme il suit : y et p étant les deux bras de levier, on devra avoir $Yy = Pp$. Si on change les poids de bassin, c'est-à-dire de bras de levier, il faudra employer un nouveau poids P' pour mettre Y en équilibre, et on aura encore $Yp = P'y$. Le produit de ces deux équations donne $Y^2 = PP'$, ou $Y = \sqrt{(PP')}$; c'est-à-dire *que le poids cherché est moyen proportionnel entre* P *et* P'.

IV. *De la Poulie.*

* 107. On peut regarder la POULIE comme une machine
Fig. 55 et 56. composée du levier : elle consiste en une espèce de roue ou de cylindre d'épaisseur arbitraire, retenue par un axe *fixe* ou *mobile*; on la fait ordinairement circulaire, et c'est dans cet état que nous l'examinerons ici. La surface courbe de cette roue est en partie enveloppée d'une corde, et pour faciliter le mouvement, cette surface est creusée en gorge : dans le cas où l'axe est fixe, les puissances sont appliquées aux deux extrémités du cordon : voyez fig. 55. Quand la poulie est mobile, comme dans la fig. 56, le cordon a l'une de ses extrémités fixe; et la seconde puissance agit sur l'axe même.

* Pour que deux forces P' et P'' soient en équilibre
Fig. 57. lorsqu'elles agissent aux extrémités du cordon qui est passé dans la gorge d'une poulie, il faut ici, comme pour le levier, exprimer que la résultante de ces forces passe par l'axe E; on a par conséquent les momens de ces

forces égaux, ou plutôt $P' = P''$, car les perpendiculaires GE et EH sont égales (on peut d'ailleurs regarder ces deux forces comme agissant aux extrémités des bras de leviers égaux GE et EH). Donc *la poulie fixe ne sert qu'à changer les directions des deux puissances qui agissent aux extrémités du cordon, puisque ces forces doivent être égales.*

Quant à la pression qu'éprouve l'axe dans le cas de la poulie fixe, elle est la résultante R des forces P' et P'' égales; et on a vu que (18, IV) si on nomme ζ le demi-angle formé par les directions des forces, c'est-à-dire si ζ désigne l'angle $P''AE$, moitié de $P'AP''$, on a * Fig. 57.

$$R = 2P' \cos \zeta \ldots\ldots (N'').$$

Cette équation donne aussi le rapport qui existe entre les deux puissances dans le cas d'équilibre de la poulie mobile. En effet, on peut regarder la poulie fixe comme mobile, mais retenue en équilibre par trois forces P', P'' et R, celle-ci étant appliquée à l'axe. Le cordon, dans la poulie mobile, a l'une de ses extrémités arrêtée par un point fixe, et par conséquent il éprouve la tension P'. Comme dans le triangle GEO on a $GO = GE \cos \zeta$, d'où $2 \cos \zeta = \frac{GH}{GE}$, on voit que l'équation (N'') équivaut à $\frac{R}{P'} = \frac{GH}{GE}$; donc *dans l'état d'équilibre de la poulie mobile, la puissance* P' *est à la force* R *appliquée à l'axe, comme le rayon de la poulie est à la corde de l'arc embrassé par le cordon.* Fig. 75.

Si la poulie mobile étoit pesante, il faudroit regarder le poids R comme formé du poids dont elle est réellement chargée, augmenté du poids de la poulie. *

* 108. Concevons maintenant un système de plusieurs
Fig. 58. poulies mobiles, comme on le voit dans la fig. 58. La poulie C''' ne peut tourner sans entraîner la suivante C'', et ainsi des autres; le poids R montera donc par l'action de la force M. Soient t', t''..... $t^{(n)}$ les tensions des cordons des poulies C', C''...$C^{(n)}$; $2\zeta'$, $2\zeta''$....$2\zeta^{(n)}$ les arcs embrassés par les cordons. On a pour l'équilibre, en vertu de l'équation précédente, savoir :

autour de la poulie
$$\left\{\begin{array}{ll} C' \;\ldots\ldots\ldots & R = 2t' \cos\zeta' \\ C'' \;\ldots\ldots\ldots & t' = 2t'' \cos\zeta'' \\ C''' \;\ldots\ldots\ldots & t'' = 2t''' \cos\zeta''' \\ & \text{etc.} \\ C^{(n)} \ldots & t^{(n-1)} = 2t^{(n)} \cos\zeta^{(n)} = 2M \cos\zeta^{(n)}. \end{array}\right.$$

* Ces n équations doivent servir à déterminer n des quantités R, M, t', t''...ζ', ζ''... et comme chaque équation doit avoir une inconnue, nous supposerons que la figure du système est donnée; ζ', ζ'' sont connues. Alors si on multiplie entre elles les deux, trois, etc., premières de ces équations, on déterminera aisément t', t'', etc., c'est-à-dire la tension de chaque cordon; si on les multiplie toutes, on aura pour la relation entre les deux forces M et R, l'équation

$$R = 2^n \times M(\cos\zeta'.\cos\zeta''.\cos\zeta'''....\cos\zeta^{(n)})\ldots (O'').$$

Il suffit donc de connoître les directions des cordons pour trouver le rapport entre les forces P et M.

* 109. Lorsque deux forces parallèles P et M sont appliquées aux deux extrémités d'un cordon passé sur une poulie fixe, leur résultante P, ou la pression exercée sur l'axe, est égale à la somme des forces, ou plutôt au double de l'une d'elles (30); et comme alors $\zeta = 0$, la

formule (N'') s'applique encore à ce cas. Il est même visible que lorsque la poulie est mobile, la force M a alors la direction la plus favorable pour retenir en équilibre la force R, puisqu'elle est la plus petite possible : l'équation (O'') a également lieu.

Si on a un système de poulies mobiles dont les cordons soient parallèles, alors $\cos C' = \cos C'' =$ etc. $= 1$, et l'équation (O'') se réduit à $R = 2^n M$; d'où on tire $\frac{M}{R} = \frac{1}{2^n}$; *la force est à la résistance comme l'unité est à la puissance de 2 marquée par le nombre des poulies mobiles.* *

On peut employer ce système de poulies pour aider les forces à faire équilibre à des résistances considérables ; ainsi qu'on peut le voir d'après l'équation $R = 2^n M$. Mais on doit observer que la dernière poulie C' ne peut monter de a, sans que les deux cordons qui en embrassent la gorge ne se raccourcissent eux-mêmes, chacun d'une pareille longueur ; ainsi il aura dû passer dans cette gorge une longueur de corde $= 2a$: l'avant-dernière poulie C'' devra donc monter de $2a$, pour que la dernière s'élève seulement de a. Par la même raison, les cordons de la poulie C''' doivent se raccourcir chacun de $2a$, pour que cette dernière C'' s'élève aussi de la hauteur a; ce qui forcera la poulie C''' de monter de $2^2 . a$, et ainsi de suite. Donc pour que le poids R s'élève d'une hauteur a, il faut que la puissance développe une longueur de corde $= 2^n$; de sorte que ce qu'on a gagné du côté de la puissance est perdu du côté du tems. Fig. 59 *bis*.

On appelle *Mouffle* une machine composée de plusieurs poulies portées par une même chappe : on assemble (comme on le voit dans les fig. 59) une mouffle mobile avec une mouffle fixe ; de sorte qu'un même cordon, tiré par une force M, embrasse tour-à-tour les poulies; la mouffle mobile porte un poids R. Puisque chaque poulie doit être en équilibre en particulier, toutes les portions du cordon éprouvent la même tension : on peut donc regarder ces tensions comme autant de forces égales employées à soutenir le poids R : en supposant les cordons parallèles, ce qui a ordinairement lieu d'une manière sensible, le poids R se distribue également sur tous les cordons qui sont employés à soutenir la mouffle mobile. Soit n le nombre de ces cordons : on a donc $R = Mn$.

V. *Du Treuil.*

★ 110. Le TREUIL ou Tour est une machine composée
Fig. 60. d'un cylindre et d'une roue qui ont le même axe, et qui font corps ensemble : cet axe a ses deux extrémités placées sur des appuis ou tourillons ; une corde est enveloppée autour du cylindre, et est attachée à une résistance, ou supporte un poids. On imprime à la roue un mouvement de rotation sur l'axe; elle fait tourner le cylindre, la corde s'enveloppe, et par là on surmonte la résistance, ou on élève le poids. Ce mouvement de rotation est donné à la roue soit à l'aide d'une corde qui est enveloppée sur cette roue, et qu'une puissance sollicite; soit en garnissant les jantes de cette roue de chevilles auxquelles on applique des forces, ou sur lesquelles des hommes montent en agissant par leur poids.

★ Quelquefois au lieu d'une roue on se sert de deux leviers
Fig. 61, 62, et 63. qui traversent le cylindre, fig. 61 et 62 ; ou de *Manivelles*, fig. 63 : mais les effets sont les mêmes ; la révolution est seulement moins uniforme ; la machine a d'ailleurs l'avantage d'être moins embarrassante. Au reste, pour les conditions d'équilibre, toutes ces dispositions sont indifférentes. L'axe du cylindre peut être horisontal, comme

dans le treuil, la *Roue de carrière*, fig. 60, la *Grue* qui sert dans les bâtimens, fig. 65, etc. Il est vertical dans le *Cabestan*, fig. 62, machine dont on se sert pour amener peu-à-peu des fardeaux considérables.

Dépouillons le tour de tout appareil extérieur inutile; * *AB* est l'axe du cylindre que nous supposons horisontal, Fig. 64. *A* et *B* sont ses appuis; *FCD* est la roue, *D* son centre; le plan de la roue est coupé par le cylindre suivant le cercle *LDM*. La force *P* est appliquée à l'extrémité de la corde *FP* tangente à la roue *F*, et dans le plan de cette roue, qui est perpendiculaire à l'axe; la résistance, que nous représenterons par un poids *Q*, est attachée à la corde *QIH* qui enveloppe le cylindre; le plan perpendiculaire à l'axe passant par cette corde, coupe ce cylindre suivant le cercle *GHI*.

Cela posé, au point *M*, où le plan horisontal conduit * suivant l'axe du cylindre, vient couper le cercle *LDM*, et de l'autre côté de cet axe relativement au poids *Q*, appliquons deux forces verticales Q' et Q'', opposées et égales à *Q*; l'état du système demeurera le même. Or, les forces *Q* et Q' sont en équilibre puisqu'elles sont égales et à la même distance de l'axe : c'est-à-dire que leur résultante $S = 2\,Q$, rencontre l'axe au point *K*, situé au milieu de *GD*. Il ne reste donc plus que les forces *P* et Q'', qui sont dans le plan de la roue, et sont dans le cas du levier; ainsi ces forces doivent tendre à faire tourner en sens contraire, et leurs momens relativement au point *D* doivent être égaux; ceux de *Q* et de Q'' le sont d'ailleurs aussi (36) : donc, *pour l'équilibre du treuil, les forces tendent à le faire tourner en sens contraire, et leurs momens par rapport à l'axe sont égaux :* ou, ce qui revient au même, *la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de* *la roue.* On peut donc regarder comme inconnue l'une quelconque de ces quatre quantités, et résoudre tous les problêmes relatifs au treuil.

On observera que ce résultat n'est autre chose que celui qui a été démontré (45), pour les équations de l'équilibre de rotation autour d'un axe fixe : en effet, les deux puissances étant dans des plans perpendiculaires à l'axe, leurs composantes parallèles à cet axe sont nulles. On pourroit donc remplacer la démonstration précédente par ce qui a été dit n°. 45.

* 111. La corde dont on se sert dans le treuil, est communément d'un diamètre qu'on ne peut négliger. L'action des puissances se transmet par l'axe de la corde; il est évident que son rayon doit être ajouté d'une part à celui du cylindre, et de l'autre à celui de la roue. La proposition précédente devient donc : *la puissance est à la résistance qui lui fait équilibre dans le Tour, comme la somme des rayons du cylindre et de la corde, est à la somme des rayons de la corde et de la roue.*

Si donc la corde s'est enveloppée autour du cylindre, et en a couvert entièrement la surface, pour qu'elle continue de s'enrouler, elle doit former un second rang; ainsi on doit augmenter la puissance.

* 112. Quant aux pressions exercées sur les deux appuis
61. A et B, il importe de les calculer; elles sont produites par les composantes en A et B des résultantes des forces P et Q du systême, lesquelles doivent rencontrer l'axe. Ces forces équivalent à S et à la résultante de P et Q''; nous allons nous occuper en particulier de chacune.

D'abord, la force S décomposée en deux autres verticales en A et B, donne, d'après le n°. 31, les pressions suivantes, savoir : $\frac{KB}{AB} \times S$ en A, et $\frac{AK}{AB} \times S$ en B.

Soient donc $AD = b$, $GB = b'$, $DG = c$, et...... $AB = a = b + b' + c$, comme K est au milieu de DG, on a $KB = \frac{1}{2}c + b'$, et $AK = \frac{1}{2}c + b$: ainsi les pressions qui proviennent de $S = 2Q$ sont

$$1^o. \text{ en } A \ldots \frac{c + 2b'}{a} \times Q, \quad 2^o. \text{ en } B \ldots \frac{c + 2b}{a} \times Q.$$

La résultante des forces P et Q'' est déterminée d'après ce qui a été dit (23) : prenons donc dans le plan de la roue, un axe des x horisontal et un axe des y vertical ; les composantes de ces forces parallèlement aux axes seront $P \cos \alpha$ et $P \sin \alpha - Q$, en désignant par α l'angle connu que P fait avec l'horison. Ainsi, on trouve, en raisonnant comme ci-dessus, que les composantes verticales sont

$$1^o. \text{ en } A \ldots\ldots \frac{a-b}{a} \times (P \sin \alpha - Q),$$

$$2^o. \text{ en } B \ldots\ldots \frac{b}{a} \times (P \sin \alpha - Q),$$

elles doivent être ajoutées aux précédentes : de même les composantes horisontales sont

$$1^o. \text{ en } A \ldots \frac{a-b}{a} \times P \cos \alpha, \quad 2^o. \text{ en } B \ldots \frac{b}{a} \times P \cos \alpha;$$

on aura donc en A deux forces, l'une λ verticale, l'autre μ horisontale : soient de même λ' et μ' celles qui ont lieu en B. L'effort exercé en A étant la résultante des forces λ et μ, sera $= \sqrt{(\lambda^2 + \mu^2)}$, (18) ; l'effort en B sera $\sqrt{(\lambda'^2 + \mu'^2)}$: et les tangentes respectives des angles formés par ces efforts avec l'horison sont $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\lambda'}{\mu'}$. Or, comme les quantités λ, λ', μ et μ' sont données, on connoîtra la grandeur et la direction des efforts exercés en A et B. On observera seulement que lorsque le mouvement de la machine a lieu, comme le point K change sans cesse, ces deux choses varient à mesure que la corde s'enroule : mais il n'est ici question que d'équilibre.

* Le poids de la machine contribue encore à la pression : on peut le regarder comme une force T appliquée sur l'axe au centre de gravité N du treuil. En la décomposant, et faisant $AN=k$, $NB=k'$, on trouve pour les pressions en A et B, $\frac{k'}{a}\times T$, $\frac{k}{a}\times T$. On doit donc augmenter de ces termes les valeurs ci-dessusde λ et λ'.

VI. *Des Roues dentées.*

* 113. Une Roue dentée est un cylindre mobile autour
Fig. 66. de son axe et dont la surface est munie de filets parallèles à cet axe : ces filets ou *dents* s'engagent dans ceux qu'on forme de même sur une autre roue dentée, et cet *Engrenage* est tel, que dès que l'une est mise en mouvement autour de son axe, l'autre tourne en sens contraire ; les largeurs des dents, et les intervalles qui les séparent, doivent être égaux dans les deux roues. Voyez la fig. 66.

* Sur l'axe de chaque roue dentée, on en adapte ordinairement une autre, qui fait corps avec elle, et est d'un diamètre moindre : cette roue s'appelle *Pignon ;* les dents se nomment *Aîles*. Alors chaque roue dentée engrène dans le pignon de la suivante, comme on le voit dans la fig. 66. Si une force M fait tourner la première roue A, le pignon a fera mouvoir la roue B ; de même celle-ci *mènera* la roue C, etc. Enfin on adapte à la dernière roue E, au lieu de pignon, un cylindre non denté, autour duquel est roulée une corde qui soutient un poids R, ou qui est sollicitée par une force R. Cherchons les conditions d'équilibre entre la puissance M et la résistance R, aussi bien que les efforts exercés sur les dents des roues.

* On observera que chacune de ces roues et son pignon

ne sont autre chose qu'un tour : on a donc ici à considérer un systéme de tours. La manière dont nous allons résoudre le problême proposé, n'appartient pas seulement aux roues dentées, mais l'esprit de la méthode doit être appliqué à toute machine composée, comme nous aurons occasion de le voir par la suite, et comme nous l'avons déja fait (108).

La roue A entraîne son pignon a, celui-ci mène la roue B; désignons par P' l'effort exercé par les aîles du pignon contre les dents de la roue : soient de même P'', P''',..... les efforts exercés par les aîles des pignons b, c,..... sur les dents des roues C, D, avec lesquelles ils engrènent. De plus soient r', r'',... $r^{(n)}$, etc. les rayons des roues; s', s'',..... $s^{(n)}$ les rayons des pignons; l'accent $^{(n)}$ est relatif à la dernière roue. Généralement les rayons sont les distances respectives de chaque axe au point de contact de la dent avec l'aîle du pignon d'engrenage; mais comme ce point varie à mesure que le système se meut, on peut prendre, par approximation, une distance moyenne : nous entendrons donc ici par rayons, les longueurs comprises entre les axes et le point qui est au milieu de la longueur des dents. Fig. 66.

Cela posé, M et P' sont deux forces en équilibre autour du treuil A, leurs directions sont tangentes à la roue et au cylindre; de même pour les autres : on aura donc pour la condition d'équilibre

$$\text{autour de la roue}\left\{\begin{array}{lll} A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Mr' & = P's' \\ B\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P'r'' & = P''s'' \\ C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & P''r''' & = P'''s''' \\ \quad\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots & & \text{etc.} \\ \text{Dernière}\ldots\ldots & P^{(n-1)}r^{(n)} & = Rs^{(n)}. \end{array}\right.$$

Multiplions entre elles les deux premières équations, ou *de dents des roues est au produit des nombres d'ailes des pignons.* On observe qu'ici $k^{(n)}$ et q' n'entrent pas, parce qu'il n'y a ni dents à la première roue, ni ailes au dernier pignon, ou du moins parce qu'ils sont inutiles à l'état du système.

En général l'équation (Q'') sert à résoudre ce problème: *de ces quatre choses, les nombres de tours de la première et de la dernière roue, les nombres de dents des roues et de leurs pignons, trois étant données, trouver la quatrième.* On peut donc se servir de cette équation pour trouver les nombres de dents et d'ailes d'un rouage, en supposant connus les nombres de tours de la première et de la dernière roue : mais on voit qu'ici le problême est très-indéterminé, car il consiste à trouver (outre le nombre de roues qui est arbitraire) k', $k''...k^{(n-1)}$, q'', $q'''....q^{(n)}$, étant donné $N^{(n)}$ et N' : mais comme ces valeurs sont toutes entières, cela particularise un peu la question.

Si, par exemple, on veut employer cinq roues, et faire en sorte qu'à chaque tour entier de la première E, à laquelle on suppose le moteur R appliqué, la dernière A, en fasse 2800 : on fera $N^{(n)} = 1$, $N' = 2800$, et l'équation (Q'') deviendra $2800.k'.k''.k'''.k^{\text{IV}} = q''.q'''.q^{\text{IV}}.q^{\text{V}}$. On peut se donner arbitrairement toutes ces quantités, moins une : mais cette dernière devant être aussi un nombre entier, on disposera de toutes, excepté deux, en ayant soin de prendre les valeurs de q', $q''....$ plus grandes que k', $k''....$ et entières. Soit pris, par exemple, pour k'', k''', k^{IV}, q''', q^{IV}, q^{V}, les valeurs respectives 10, 12, 12, 80, 80 et 84; notre équation sera réduite à $15\,k' = 2\,q''$. On est conduit à une équation indéterminée, qui, traitée par la méthode connue, admet pour k' toutes les valeurs paires : on pourra prendre, par exemple, $k' = 10$, ce qui donne $q'' = 75$. On voit donc qu'entr'autres hypothèses, on a pour le système d'engrenage des ailes et des dents les nombres suivans :

$$\text{Pignons}\begin{cases} d \ldots\ldots k^{\text{iv}} = 12 \\ c \ldots\ldots k''' = 12 \\ b \ldots\ldots k'' = 10 \\ a \ldots\ldots k' = 10 \end{cases} \qquad \text{Roues}\begin{cases} E \ldots\ldots q^{\text{v}} = 84 \\ D \ldots\ldots q^{\text{iv}} = 80 \\ C \ldots\ldots q''' = 80 \\ B \ldots\ldots q'' = 75 \end{cases}$$

Au reste à cet égard on doit faire une observation. Les dents et les ailes qui s'engrènent devant être également larges et espacées, le rapport qui existe entre leurs nombres doit être égal à celui des circonférences de la roue et du pignon, ou à celui de leurs rayons, c'est-à-dire que les *nombres de dents et d'ailes sont entre eux comme les rayons de la roue et du pignon*. On a donc pour la roue B et le pignon a, $\frac{q''}{k'} = \frac{r''}{s'}$; il en est de même des autres; ainsi on a

$$q''s' = r''k',\ q'''s'' = r'''k'' \ldots\ldots q^{(n)}s^{(n-1)} = r^{(n)}k^{(n-1)},$$

équations qui servent à déterminer la grandeur de chaque roue et de son pignon, lorsque le nombre de dents est fixé, ou réciproquement. En les multipliant toutes on trouvé

$$\frac{q''q'''q^{\text{iv}} \ldots\ldots q^{(n)}}{k'k''k''' \ldots k^{(n-1)}} = \frac{r''r'''r^{\text{iv}} \ldots\ldots r^{(n)}}{s's''s''' \ldots s^{(n-1)}},$$

et rapprochant ce résultat des équations (P'') et (Q''), on obtient

$$\frac{r'}{s^{(n)}} \times \frac{N'}{N^{(n)}} = \frac{R}{M},$$

équation qui sert à faire connoître l'un des rapports

$\frac{N'}{N^{(n)}}$, $\frac{R}{M}$, $\frac{r'}{s^{(n)}}$, lorsque les deux autres sont donnés. Or $2\pi r'$ et $2\pi s^{(n)}$ sont les circonférences de la roue A et du pignon e; donc le premier membre de notre équation est le rapport des chemins m et r que décrivent ensemble la force et le poids, on a donc

$$Mm = Rr,$$

plus la puissance sera grande et plus le poids aura de vitesse.

Les horlogers prétendent que les nombres de dents d'une roue et du pignon d'engrenage doivent être *rentrans*; c'est-à-dire que pour faciliter le mouvement, il convient que chaque dent se trouve en contact avec la même aile, ce qui exige que le nombre des dents soit un multiple de celui des ailes; mais cette assertion est-elle bien fondée ? du moins on est libre de ne point s'y soumettre.

Fig. 66. 115. Il est facile de comprendre maintenant le mécanisme des horloges. Un poids ou un moteur est appliqué à la roue E, à l'aide d'une corde roulée autour d'un cylindre e. L'action de ce poids fait tourner cette roue qu'on appelle *roue de Cylindre*; elle met le système en mouvement. Voici les nombres de dents et d'ailes qu'on peut employer.

Roue E ou de *cylindre* 84 dents; elle mène le pignon d de 12 ailes.
Roue D . . . . 80 dents; . . . . c de 12 ailes.
Roue C ou des *minutes* 80 dents; . . . . b de 10 ailes.
Roue B . . . . 75 dents; . . . . a de 10 ailes.

La roue A s'appelle roue d'*Echappement*; nous la supposerons armée de 30 dents; en voici l'usage. Il est clair que si rien n'arrêtoit les roues, l'action du poids R feroit tourner avec rapidité tout le systême, jusqu'à ce que la corde eR se fût entièrement développée de dessus le cylindre. Mais si à la dernière roue A on imagine un *pendule*, c'est-à-dire un corps pesant M fixé à l'extrémité d'une verge ML; et si de plus une *Ancre* KLI fait corps avec cette verge, et oscille avec elle, il est aisé de voir ce qui arrivera. Chaque fois que le corps M passera en oscillant, de l'autre côté de la verticale LN, la branche I de l'*Ancre* s'élèvera, et ne retenant plus sa dent, celle-ci *s'échappera*, la roue tournera donc : mais il ne pourra passer qu'une dent; car l'autre branche K de l'ancre s'abaissant en même tems que le point I s'élève, celle-là retiendra la dent qu'elle rencontrera; et ainsi de suite, de sorte qu'il ne s'échappera qu'une dent à chaque oscillation double. Fig. 67.

Nous ne pouvons ici donner de détails sur le pendule et la théorie des oscillations (194); mais si la longueur ML est telle que ces oscillations se fassent de seconde en seconde, la roue A n'aura fait un tour entier qu'en 60 secondes ou une minute. Si donc l'axe de la roue d'échappement porte une aiguille GH, mobile avec elle, et si on adapte sur le même centre un cadran fixe, dont la circonférence soit divisée en soixante parties égales, l'extrémité H se présentera successivement à tous les points de division de ce cadran, et y marquera les secondes.

Chaque tour que la roue B fera, correspondra à $7\frac{1}{2}$ tours faits par la roue A, puisque celle-là est armée de 75 dents, tandis que le pignon a a 10 ailes : la roue B fera donc son tour en 450 secondes, c'est-à-dire à chaque demi-quart-d'heure. Le pignon b a 10 dents, la roue C en a 80; elle fera donc son tour en une heure, et on pourroit marquer les minutes sur un autre cadran, si on en disposoit un Fig. 66.

sur l'axe de la roue C, comme pour la roue d'échappement. La roue D fera son tour en 6 h. $\frac{2}{3}$, et enfin la roue E fera un tour en 46 h. $\frac{2}{3}$.

On peut faire porter par l'axe de la roue C un second pignon de 7 ailes qui mènera une roue de 84 dents; celle-ci fera son tour en 12 heures, et pourroit par conséquent marquer les heures sur un cadran concentrique et qui seroit divisé en douze parties égales. Nous ne ferons pas ici le détail des dispositions qui conviennent le mieux aux roues, ni des nombres de dents et d'ailes qui sont usités de préférence. Ces nombres peuvent être très-différens de ceux que nous venons d'employer : il est d'ailleurs rare qu'on se serve de plusieurs cadrans pour marquer les secondes, les minutes et les heures; et souvent il n'y en a qu'un seul, du centre duquel on fait sortir les axes destinés à porter les aiguilles. Voyez le *Traité d'horlogerie* de Berthoud.

116. On se sert aussi du moyen suivant pour imprimer le mouvement à la machine, au lieu du poids R : on adapte à la roue E une boîte cylindrique F, qu'on nomme *Tambour* ou *Barillet*, avec laquelle l'axe ou *arbre* ne fait point corps; de sorte que le tambour peut tourner en même tems que la roue E sur l'axe HG immobile. Un ressort spiral im, qu'on nomme *grand ressort*, est caché dans le tambour; il a l'une de ses extrémités i fixée au limbe intérieur du cylindre; l'autre m l'est à l'arbre même. Si donc on fait tourner l'arbre, le ressort se serre autour en l'enveloppant, et faisant effort pour se développer, il fait tourner le barillet en sens contraire, parce que l'arbre devient fixé. Ainsi il imprime à la machine un mouvement de rotation, et remplace le poids R. Pour bander le ressort, il ne faut donc que faire tourner l'arbre et le fixer ensuite : pour cela on en façonne l'extrémité H

en prisme à quatre angles, c'est le *carré*; on le fait entrer dans une clef *T* de même calibre, qu'on fait tourner. Le ressort enveloppe alors l'arbre, car les autres rouages retiennent la roue *E*, ainsi que le barillet *F*. Après chaque tour de clef, l'arbre ne peut tourner en sens contraire, et il reste fixé; car il fait corps avec une roue *K* à dents obliques, dans lesquelles est engagée une languette *AB*, pressée par une lame d'acier *CD*, et retenue en *A* par les platines fixes *M* et *N* qui portent les axes des roues. Il en résulte que quand on veut tendre le ressort, il faut tourner l'arbre dans un sens: alors la roue *F* glisse sur l'encliquetage *AB*; mais lorsque l'on abandonne le barillet à lui-même, il tourne, entraîne (*fig.* 66) la roue *E* et le reste du système. L'arbre reste seul immobile par l'action du grand ressort; la durée des oscillations du pendule *LM* peut varier avec la force de pression exercée sur les arrêts *K* et *I*; or à mesure qu'il se développe par l'effet du mouvement, cette pression diminue: il s'ensuit que les tems des oscillations pourroient être inégaux, si on n'y remédioit par un mécanisme particulier. La *Fusée* est une espèce de cône tronqué *B*: le tambour *A*, au lieu d'être adhérent, comme dans la *fig.* 68, à la première roue *E*, forme une pièce distincte. La surface de la fusée est munie d'un plan incliné, en *Hélice*, destiné à recevoir une chaîne qui s'y enveloppe. Le grand ressort transmet son action à la fusée, à l'aide de cette chaîne. On voit que, par ce mécanisme ingénieux, le bras de levier de la puissance croît à mesure que le ressort se débande, ce qui tend à égaliser ses effets. Lorsque le ressort est détendu, la chaîne enveloppe entièrement le barillet, en laissant la fusée à nud: une clef, dans laquelle on insère le *carré H*, sert à faire tourner le corps de la fusée en sens contraire; par là la chaîne

Fig. 67.

Fig. 69.

se déroule de dessus le barillet, et le forçant à tourner dans le même sens, tend de nouveau le ressort, et reporte la chaîne sur la fusée, de sorte que l'arbre *K* reste ici constamment fixe, et le ressort ne se bande que par le mouvement du barillet entraîné par la fusée. Du reste, cette pièce ne fait pas corps avec la roue *E* qui a le même axe; le déclic, disposé dans son intérieur, permet à la fusée de tourner sans elle, d'un côté seulement, et par conséquent sans rien déranger à la situation des autres roues; tandis que cette fusée ne peut tourner dans l'autre sens sans entraîner toutes les pièces; c'est pour cela que quand on monte une montre, les aiguilles ne prennent aucun mouvement. En un mot, tout l'appareil qui étoit précédemment adapté à la première roue *E*, existe de même ici, excepté que le barillet forme une pièce distincte.

Après avoir évité l'emploi d'un poids pour moteur, il ne faut plus, pour rendre la machine portative, que trouver un autre régulateur que le pendule. On fait, dans les Fig. 70. montres, usage du mécanisme suivant. Le barillet *A* mène la fusée *B* avec sa roue, de sorte que le mouvement se communique aux autres roues *C*, *D*, *F*; la tige de cette dernière, qui est celle des minutes, fait mouvoir une roue *G* dont l'axe est horisontal, et qu'on nomme roue de Fig. 70 bis. *rencontre*. Une tige porte deux palettes alternes *L*, *L* qui engrènent tour-à-tour dans les dents de la roue de *rencontre;* car comme elle porte un nombre impair de dents, chacune est diamétralement opposée à un *entredent*, de sorte que les deux palettes ne peuvent être à-la-fois rencontrées. La tige qui les soutient porte une roue *HK* non dentée, qu'on nomme *Balancier*. Cette roue reçoit donc son mouvement de la roue de rencontre, et elle oscille à l'aide d'une petite lame spirale *hl*, qui est capillaire, et dont l'une des extrémités est fixée en h aux platines, tandis que l'autre l'est à la tige du balancier en l. Cette spirale, en se roulant et se développant alternativement, remplace le pendule : de sorte que la roue de rencontre avance d'une dent chaque fois que le balancier achève deux vibrations. La rapidité du mouvement dépend de la longueur du filet spiral hl, et on l'augmente ou la diminue en accourcissant ou allongeant ce filet, ce qui se pratique à l'aide d'un arrêt disposé à cet effet. Dans les montres ordinaires, le balancier fait 17,280 vibrations par heure. Mais comme le tems des oscillations du balancier dépend sur-tout de la force de pression exercée sur les palettes L par l'action du grand ressort, c'est sur-tout ici qu'il importe de faire usage de la fusée, qui n'est guère employée lorsqu'on se sert d'un pendule pour régulateur.

Le tems qu'une horloge peut marcher sans avoir besoin d'être montée dépend de plusieurs causes, 1°. des nombres de roues, de leurs dents et des ailes des pignons; 2°. de la longueur du pendule : il y en a qui ne battent que les quarts de seconde; 3° de la force du ressort enfermé dans le barillet; ou de la longueur de la corde qui soutient le poids moteur, et de la grandeur de la circonférence du cylindre sur lequel elle se roule. Il arrive même que, d'après les principes développés n°. 109, on adapte quelquefois à cette corde des mouffles, pour que le poids descendant moins rapidement, la machine n'ait pas aussi souvent besoin d'être remontée.

117. Il arrive quelquefois que les roues dentées n'ont pas leurs axes parallèles; voici, dans ce cas la disposition qu'il convient de leur donner. Concevons deux cônes droits, qui, ayant leurs sommets en un même point et leurs axes fixes, auroient leurs surfaces tangentes suivant un de leurs côtés, si on imagine ces surfaces

revêtues de filets disposés dans le sens de ces côtés, l'un des cônes ne pourra tourner sur son axe sans entraîner l'autre, et le faire tourner en sens contraire. Si donc, par un même point du filet en contact, on fait passer deux plans, perpendiculairement à l'axe de chaque cône, ils couperont ces cônes et en détacheront deux troncs, revêtus de filets, qui feront l'office de dents. Ces roues n'auront pas leurs axes parallèles, et néanmoins engrèneront.

Fig. 71 et 72. On peut aussi disposer ces roues comme on le voit dans les figures 71 et 72; on donne le nom de *lanterne* au pignon qui est employé dans celle-ci.

VII. *Du Cric.*

★ 118. Concevons une barre AB, dentée d'un côté, et

Fig. 73. retenue dans une chappe, ou forte boîte KL; en dessus on pratique une ouverture par laquelle cette barre peut sortir, lorsqu'on fait tourner un pignon E qui engrène avec les dents de la barre, et lui communique un mouvement de translation. Cette machine s'appelle CRIC : son usage est d'élever le poids qu'on applique à l'extrémité A de la barre. Pour mettre le pignon en mouvement, on se sert d'une manivelle, disposée comme on le voit dans la figure.

★ Soit P la puissance appliquée à la manivelle dont le rayon EF est R, soit r le rayon du pignon, et Q la résistance à vaincre en A. Il est visible que cette résistance peut être supposée immédiatement appliquée sur la dent du pignon en contact avec la barre : ainsi (110) les momens des deux forces, par rapport à l'axe du pignon, doivent être égaux; et on a $RP = Qr$. Donc *la puissance est à la résistance dans l'équilibre du cric comme le rayon du pignon est à celui de la manivelle.*

★ Lorsqu'on a produit l'effet demandé, si la puissance P appliquée à la manivelle cessoit son action, le poids Q feroit redescendre la barre, en forçant le pignon à tourner en sens contraire. Pour éviter cet inconvénient, on dispose un encliquetage, comme à la fig. 68, afin d'empêcher le pignon de tourner dans l'autre sens.

On observera qu'on se sert fréquemment de manivelles à * bras courbés; mais par rayon de la manivelle, il faut entendre ici le rayon du cercle que la force *P* tend à décrire; et non la longueur rectifiée de ce bras.

Le cric que nous venons de décrire est appelé *Cric simple*; * voici la description du *Cric composé*. On dispose entre le Fig. 74. pignon *E* et la barre une ou plusieurs roues dentées, armées de leurs pignons; le pignon *E* n'agit plus alors immédiatement sur cette barre; mais les effets de la puissance se transmettent en les multipliant. Il est inutile de s'étendre sur une théorie aussi facile, puisqu'elle rentre dans celle des roues dentées: on en conclut que *dans le cric composé la force* P *est à la résistance* Q, *comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues par le bras de la manivelle.*

VIII. *De la Vis.*

119. Le triangle isocèle *GFB*, en tournant autour de * l'axe *AZ* parallèle à sa base *GB*, engendre par sa révolu- Fig. 75. tion deux cônes tronqués opposés par leurs bases. Mais si outre le mouvement de rotation, ce triangle a encore un mouvement de translation dans le sens de l'axe *AZ*, de sorte que pour diverses portions de révolution, le plan de ce triangle s'avance dans le sens de *AZ* de parties proportionnelles aux valeurs angulaires qu'il a décrites, et que de plus après une révolution entière le point *B* soit en *G*, et le triangle en *G'F'G*, et ainsi de suite....; ce triangle engendrera un solide qu'on nomme VIS. La distance *AD*

s'appelle le *pas de la vis*. Au reste il n'est pas nécessaire que le polygone générateur soit un triangle : on peut employer aussi un rectangle, et on a alors une vis à filet carré.

* On nomme *Ecrou* une autre pièce sillonnée intérieurement comme la vis l'est elle-même en relief: l'un est pour ainsi dire le moule de l'autre; de sorte que l'écrou est le solide engendré par le polygone $GHCBF$, dans sa révolution autour de AZ, en s'avançant dans le sens de cette ligne, comme dans la génération de la vis.

* La vis n'est donc qu'un cylindre revêtu d'un cordon spiral de grosseur uniforme, et dont l'inclinaison, par rapport à la génératrice du cylindre, est constante : l'écrou, au contraire, est un solide creusé de la même manière. L'une de ces deux pièces est fixe; l'autre est mobile dans le sens de sa génération, et peut par là s'insinuer comme en rampant sur la première.

* 120. La courbe que l'un quelconque des points du polygone générateur, tel que N, décrit autour de AZ, se nomme *Hélice*. Cette courbe est évidemment tracée sur la surface d'un cylindre droit qui a AZ pour axe, et $EN = r$ pour rayon de sa base; développons ce cylindre, et pour cela formons le rectangle $edcf$, tel que sa base dc soit égale à la circonférence qui a EN pour rayon, ou $dc =$ cir. r $= 2\pi r$: de plus, construisons sur ce rectangle le développement d'une révolution entière de l'hélice décrite par le point N : pour cela observons qu'il résulte de la génération de cette courbe qu'en prenant pour abscisses x des arcs de la circonférence de la base de ce cylindre, les ordonnées correspondantes y devront être comptées à la surface, suivant les génératrices, et croître proportionnellement aux abscisses : soit donc pris l'un des points d de l'hélice pour origine, $ad = bc = AD =$ la hauteur du pas de la vis que nous désignerons par h, $y = Ax$ étant l'équation de la

Fig. 75 et 76.

courbe, on aura visiblement pour son développement une droite qui forme avec bc un angle dont A est la tangente : et comme on sait d'ailleurs que cette droite doit passer par le point b qui répond à une révolution complette, on a $A = \frac{bc}{dc} = \frac{h}{2\pi r}$. On concevra plus facilement ce développement en remarquant que toutes les tangentes menées aux divers points de l'hélice se confondent avec db lorsqu'on développe le cylindre.

Nous supposerons ici que la vis est fixe, et que l'écrou est mobile à l'aide d'une force P appliquée à l'extrémité d'un levier $CP = R$. P, est perpendiculaire à la direction de ce levier, et agit dans le sens horisontal. Soit Q le poids que l'écrou supporte, ou la résistance qui s'oppose à l'effet de la force P. Si l'écrou ne posoit que sur l'un des points de la vis, supposé à une distance r de l'axe, il seroit placé en un point N du développement de l'hélice qui le porte : or ce point, pesant autant que l'écrou, seroit sur la vis comme sur un plan incliné bd. La force M appliquée horisontalement suivant MN, pour retenir ce point en équilibre, doit satisfaire à l'équation (H'' page 115) qui est ici... $M = Q \times A = \frac{Q.h}{2\pi r}$. Lorsque l'hélice n'est pas développée, cette force M est tangente au cylindre qui contient l'hélice, et perpendiculaire à la génératrice qui passe par le point n. * Fig. 77. Fig. 76.

Maintenant remplaçons cette force M subsidiaire, par la puissance P, qui est celle qui exerce effectivement son action : pour que les deux forces M et P équivalent, il faut (110, 45) que l'on ait $PR = Mr$; puisque la force M est tangente à un cylindre, et qu'on peut assimiler le levier de la force P à la roue d'un treuil; d'ailleurs leurs bras de levier sont r et R. Par là l'équation précédente devient *

$$Qh = 2\pi RP \ldots\ldots (R'').$$

* Cette équation ne renfermant pas r, est indépendante de la distance à laquelle le point pesant est supposé de l'axe: elle seroit donc encore la même si on eût pris le point N ailleurs sur la vis. Cette observation va nous conduire à un résultat général : car cette équation seroit encore vraie si l'écrou, au lieu de ne toucher la vis qu'en un seul point, la touchoit en un nombre quelconque de points. En effet, dans ce dernier cas, chacun porteroit une portion du poids Q : ces portions étant désignées par Q', Q'', etc., donneroient $Q' + Q'' + Q''' + \text{etc.} = Q$. Mais, d'un autre côté, la force P qui porte le poids de l'écrou, peut être considérée comme la somme d'autant de forces partielles P', P'', etc., qu'il y a de points de contact, lesquelles seroient employées à porter respectivement chacun des poids Q', Q'', ... ; on aura donc les équations

$$Q'h = 2\pi RP', \quad Q''h = 2\pi RP'', \quad Q'''h = 2\pi RP''', \text{ etc.}$$

dont la somme donne de nouveau l'expression (R''). Ainsi, en général, *dans l'équilibre de la vis, la puissance est à la résistance, comme le pas de la vis est à la circonférence que la puissance tend à décrire.*

* Il est facile de conclure de ce qu'on a dit ci-dessus, que

1°. La vis est une machine composée du levier et du plan incliné ;

2°. Pour une même vis, l'effet est d'autant plus grand, que la force est appliquée plus loin de l'axe ;

3°. Pour deux vis différentes, et un même bras de levier, une force a d'autant plus d'avantage, que le pas de la vis est moindre.

IX. *Du Coin.*

* 121. Soit BD un prisme triangulaire de matière très-
Fig. 78. dure ; on l'insère par l'arête ou *tranchant* AB dans une

fente faite à un corps, et frappant sur la *tête* ou face opposée DC, on le fait entrer avec force, et par là on sépare les parties de ce corps. Cette machine se nomme COIN : on s'en sert pour fendre, ou pour obtenir de grandes pressions ; les couteaux, haches, poinçons, dents, griffes, etc. sont des coins.

Pour déterminer la grandeur de la force qu'on doit appliquer à la tête du coin pour fendre un corps, il est clair qu'il faudroit connoître d'abord la résistance à vaincre : or cette résistance dépend d'une foule de circonstances particulières extrêmement variables, et qui ne sont presque jamais connues. La théorie physique du coin est donc fort obscure, et on ne doit jamais s'attendre à établir rien de certain sur cette machine. *

Nous supposerons que la direction de la puissance P est perpendiculaire à la tête AB du coin, car on peut toujours, par une simple décomposition, ramener la chose à cet état. Cette force peut être considérée comme destinée à retenir le coin ABC, pressé en F et D par les parties du corps qui tendent à se rapprocher : on retrouve donc ici la théorie du plan incliné, et les pressions en F et D doivent (103), dans le cas d'équilibre, être perpendiculaires à BC et AC. Il suit de là que la résistance des points D et F ne peut détruire l'action de la force P, qu'autant que cette force peut être décomposée en deux autres Q et R, qui passent par ces points, et dont les directions soient perpendiculaires aux faces BC et AC du coin. Donc les trois forces P, Q et R doivent concourir en un même point E, être dans un même plan ABC, et de plus satisfaire à la condition (18, I) * Fig. 71.

$$\frac{P}{\sin.QER}=\frac{Q}{\sin.PER}=\frac{R}{\sin.PEQ}.$$

Au lieu des sinus des angles QER, PER et PEQ, on peut substituer ceux de leurs supplémens C, A et B, ou plutôt les côtés c, a et b, qui étant opposés à ces angles dans le triangle BAC, sont par conséquent proportionnels à leurs sinus. On a donc $\frac{P}{c}=\frac{Q}{a}=\frac{R}{b}$, d'où on tire

$$R=\frac{b}{c}P, \quad Q=\frac{a}{c}P \ldots\ldots\ldots (S')$$

* Si le corps est solidement fixé, et si la résistance qu'il oppose à la séparation de ses parties est connue, on pourra donc juger de l'effet de la puissance. Mais ordinairement le corps est simplement retenu par des appuis, et il importe de connoître comment ils doivent être placés et quelles pressions ils éprouvent.

* 1°. Si le corps est fixé à un axe IK, et ne peut que glisser suivant sa longueur, on décomposera la force Q en deux autres, l'une Q'' perpendiculaire à cet axe, l'autre Q' suivant la droite FD qui passe par les points de contact. Soient α, β et γ les angles formés par BC, AC et FD avec l'axe IK, et faisons usage du théorême (18, I); comme $\sin. Q'FQ''=\cos\gamma=\sin. R'DR''$, $\sin. Q'FQ=\cos(\alpha-\gamma)$, $\sin RDR'=\cos(\beta+\gamma)$, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}
Q'=Q.\dfrac{\sin\alpha}{\cos\gamma}=P.\dfrac{a\sin\alpha}{c\cos\gamma}, \\[2ex]
Q''=Q.\dfrac{\cos(\alpha-\gamma)}{\cos\gamma}=P.\dfrac{a\cos(\alpha-\gamma)}{c\cos\gamma}, \\[2ex]
R'=P.\dfrac{b\sin\beta}{c\cos\gamma}, \quad R''=P.\dfrac{b\cos(\beta+\gamma)}{c\cos\gamma}
\end{array}\right\}\ldots\ldots (T')$$

Pour l'équilibre les forces Q' et R' doivent être égales, donc

$$a\sin\alpha=b\sin\beta.$$

a pression sur l'axe est la résultante de Q'' et R'', dont point d'application est facile à déterminer (33) ; sa grandeur est $Q'' + R''$, qui en vertu de l'équation précédente, se réduit à

$$\frac{P}{c}\,(a\cos\alpha + b\cos\beta)\ \text{ou}\ P.\,\frac{b\sin(\alpha+\beta)}{c\sin\alpha}.$$

On peut assimiler Q' et R' à des forces qui tendroient * un cordon FD, et la résistance du corps sur lequel le coin agit seroit alors mesurée par la tension de ce cordon, qui est (85) l'une des forces Q' et R'. Mais si ces forces ne sont pas égales, l'équilibre n'a point lieu ; R'' et Q'' sont détruites, il est vrai ; mais la tension du cordon n'est que la plus petite des forces Q' et R', l'excès de l'une sur l'autre est $\frac{P}{c\cos\gamma}(a\sin\alpha - b\sin\beta)$ puissance qui pousse le corps suivant FD, et tend à le faire glisser le long de l'axe.

2°. Si le corps est simplement posé sur un plan IK, on * opérera comme précédemment : Q'' et R'' seront encore Fig. 80. détruites, mais il ne suffit plus pour l'équilibre que $Q'=R'$. En effet, décomposons ces forces en d'autres parallèles et perpendiculaires à IK ; celles-ci seront seules détruites, car les autres ne seront plus opposées : ainsi il faut en outre que la ligne FD soit parallèle à IK, sans quoi le corps tournera pour se renverser. Soient donc comme ci-dessus, α et β les angles que forment les faces BC et AC avec IK ou sa parallèle FD; décomposons Q et R en d'autres forces perpendiculaires et parallèles au plan, nous aurons

$$\left.\begin{array}{ll} Q' = \frac{a}{c}P\sin\alpha; & Q'' = \frac{a}{c}P\cos\alpha \\ R' = \frac{b}{c}P\sin\beta; & R'' = \frac{b}{c}P\cos\beta \end{array}\right\}\ldots\ldots(U'');$$

c'est ce qu'auroit donné l'hypothèse $\gamma = 0$, introduite dans les équations (T''). Du reste les conditions d'équilibre, la tension de la corde FD et la pression sont les mêmes que ci-dessus.

* 3°. Enfin si le corps ne contient qu'un point fixe placé

Fig. 75. en un lieu déterminé M, on décomposera Q et R en deux forces suivant FD, et dans le sens qui est perpendiculaire à cette ligne, ce qui donne les équations (S'') : Q' et R' devront encore être égales entre elles, mais il faudra de plus que la résultante de Q'' et R'' passe en M ; la pression sur le point fixe est $Q'' + R''$.

* 122. Il arrive ordinairement que le triangle ABC est

Fig. 81. isocèle, et que le corps est simplement placé sur un plan qui le retient. FD est alors parallèle à ce plan ; et comme $a = b$, on a $R = Q = \frac{a}{c} P$: la force P doit d'ailleurs être appliquée au milieu N de la tête du coin, pour que les trois forces P, Q, R concourent en un même point. Q' et R' sont égales, aussi bien que Q'' et R'', et que α et 6. On a donc,

1°. Pour la pression sur le plan horisontal.........

$2\,Q'' = 2\,\frac{a}{c} \times P \cos\alpha$; or $a \cos\alpha = BN = \frac{1}{2}\,c$; donc cette pression est $= P$, ce qui est évident d'ailleurs.

2°. Pour la tension de la corde FD, $Q' = \frac{a}{c} P \sin\alpha$;

or $a \sin\alpha = CN$; donc $Q' = \frac{CN \times P}{c}$.

Ainsi la force P *est à la tension de la corde* FD, *comme la tête du coin est à sa hauteur.*

Cette corde n'est d'ailleurs mue dans le sens FD par aucune force, puisque les puissances horisontales Q' et R' se détruisent.

En rapprochant cette exposition de celle qu'on a faite pour le plan incliné, il est facile de voir le rapport qu'elle a avec cette dernière, et avec la théorie de l'équilibre des voûtes. On voit d'ailleurs que la force P agit à l'aide du coin avec d'autant plus d'avantage, que CN est plus grand, et que c est plus petit; c'est-à-dire lorsque l'angle C est plus aigu.

X. *Des Machines composées.*

123. Les dernières machines que nous venons d'examiner sont, à proprement parler, simples; il arrive souvent qu'une d'elles ne suffit pas seule à l'objet auquel on la destine : alors on en dispose plusieurs ensemble de la manière la plus convenable, et la perfection consiste à employer les moyens les plus simples et les plus faciles. Nous ne pouvons ici entrer en détail sur les machines composées, et on peut consulter à cet égard des ouvrages dont l'objet est différent du nôtre; nous nous occuperons seulement de faire voir comment on peut appliquer le calcul, et trouver le rapport entre la puissance et la résistance. Dans la vis et les roues dentées, nous avons déja fait des applications de l'esprit de la méthode qu'on doit employer à cet effet; nous allons la rendre encore plus sensible par quelques exemples fort utiles. *

1°. *De la Vis sans fin.*

124. Le cylindre qui a pour rayon $cr = r$, porte sur son axe une roue dentée dont le rayon est $Rc = R$; cette roue fait corps avec le cylindre, sur lequel une corde roulée soutient un poids P : une vis AB, dans une situation horisontale, est posée sur deux tourillons A et D: le pas de cette vis est $EF = h$; elle engrène avec la roue: * Fig. 82.

enfin sur l'axe de la vis est une manivelle dont le bras est $BC = a$. La force Q, en imprimant un mouvement à la vis, fait tourner le cylindre et monter le poids. Cette machine a été nommée VIS SANS FIN.

* Proposons-nous de connoître, dans le cas d'équilibre, le rapport entre les forces P et Q, et la pression X exercée contre les filets de la vis. Il est clair que puisque l'équilibre existe entre les puissances Q et X, on a (120), $hX = Q.\text{cir}\, a$; pareillement on a pour l'équilibre entre les forces P et X (110), $Pr = XR$; en multipliant ces deux équations afin d'eliminer X, on trouve

$$Phr = QR \times \text{cir}\, a \ldots\ldots\ldots (V'').$$

Ainsi *dans l'équilibre de la vis sans fin, la puissance est à la résistance comme le produit du rayon du cylindre par le pas de la vis, est au produit du rayon de la roue par la circonférence que décrit la puissance.*

2°. *Du Pont-Levis.*

Fig. 83. 125. La figure 83 est le profil d'un PONT-LEVIS. Cette machine est composée du *Tablier CD*, et de deux longues pièces de bois, profilées en *EB*. On nomme *Bascule* la partie *EA* de ces pièces; elles sont liées entre elles par des traverses de bois; l'autre partie *AB* est appelée *Flèche*; chaque flèche a son extrémité unie au tablier par une chaîne, représentée en *BC*. En *A* et *D* sont des tourillons, qui permettent aux flèches et au tablier de s'incliner par rapport à l'horison.

On dispose le tablier de manière à servir de plancher, à l'aide d'un assemblage de pièces de bois : tout le systême peut être mis en mouvement par une force convenable appliquée en *E* : de sorte qu'on peut employer le tablier à servir de pont ou de porte, suivant qu'on le met horisontalement ou verticalement. Proposons-nous de trouver la force propre à produire ce mouvement; pour cela, supposons que les chaînes ne forment qu'une ligne droite BC, et que le pont-levis soit mis dans une position quelconque. Désignons par α, β et γ les angles formés par l'horisontale, avec les flèches, avec le tablier et avec la chaîne; c'est-à-dire que $BAX = \alpha$, $CDI = \beta$, $CBK = \gamma$: on aura $DCB = \beta + \gamma$. Soient enfin $AE = b$, $AB = f$, $DC = t$, $BC = c$; puis T, C, B et F les poids du tablier, de la chaîne, de la bascule et de la flèche.

Cela posé, les seules forces du système consistent en des poids, savoir : d'une part, T, C et F, qu'on peut regarder comme des forces appliquées respectivement aux centres de gravité de DC, BC et AB. De l'autre part, le poids Π agissant en E, et le poids B de la bascule; cette dernière force sera appliquée au milieu de EA, et on pourra la concevoir décomposée en deux autres, égales chacune à $\frac{1}{2}B$, et appliquées l'une en A et l'autre en E; la première sera détruite; ainsi le poids agissant en E sera $= \Pi + \frac{1}{2}B$, que nous ferons, pour simplifier $= M$.

Nous supposerons les poids T, C et F appliqués respectivement au milieu de chacune des lignes DC, BC et AB : cette hypothèse pourra paroître peu rigoureuse, car les flèches ne sont ni cylindriques, ni prismatiques; elles ont, au contraire, la forme d'une pyramide tronquée : mais outre qu'il seroit fort aisé d'appliquer les raisonnemens ci-après au cas où le centre de gravité des flèches est placé en un point quelconque, on remarquera que dans la pratique on peut regarder le milieu de la ligne à-peu-près comme le centre de gravité, tant parce que l'extrémité B porte quelques pièces de fer, que parce que la diminution d'épaisseur de la flèche de A en B n'est pas très-considérable. Chacune de ces forces est verticale, et peut être décomposée en deux autres, savoir :

1°. La force F, en $\frac{1}{2}F$ appliquée en A et détruite, et $\frac{1}{2}F$ appliquée en B.

2°. La force T, en $\frac{1}{2}T$ appliquée en D et détruite, et $\frac{1}{2}T$ appliquée en C.

3°. La force C, en $\frac{1}{2}C$ appliquée en B, et $\frac{1}{2}C$ appliquée en C.

Ces six forces équivalent à deux puissances verticales, appliquées

L'une en B....... $= \frac{1}{2}(F+C) = P$.

L'autre en C....... $= \frac{1}{2}(T+C) = Q$.

Décomposons maintenant la force Q en deux autres, dirigées, l'une suivant le prolongement Cq de la chaîne BC, l'autre suivant DC : celle-ci sera évidemment détruite : quant à l'autre, on la trouvera en formant le parallélogramme ba (18, I) ; on aura $\frac{\sin a}{CQ} = \frac{\sin . CQa}{aC}$,

ou $\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\frac{1}{2}(T+C)} = \frac{\cos\beta}{aC}$; d'où

$$aC = \frac{\cos\beta\,(T+C)}{2\sin(\beta+\gamma)}.$$

Or, cette force aC peut être supposée appliquée en B ; prenons donc $BL = aC$, et formons le parallélogramme df. La puissance aC sera décomposée en deux autres, dirigées, l'une suivant Bd, l'autre suivant BH ; celle-ci sera détruite, et on aura (18, I)

$$\frac{\sin BdL}{BL} = \frac{\sin BLd}{Bd},\ \text{ou}\ \frac{\cos\alpha}{aC} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{Bd};$$

donc

$$Bd = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha} \times aC.$$

La résistance et la puissance étant réduites à deux forces verticales, on exprimera (104) qu'elles sont en équilibre autour du point fixe A, à l'aide du principe des momens ; or, la force appliquée en B est

$$P + Bd = \tfrac{1}{2}(F+C) + \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{2\sin(\beta+\gamma)} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot (T+C).$$

Ainsi on a pour équilibre

$$bM = \frac{f}{2}\left\{F + C + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}(T+C)\right\} \ldots (X'').$$

Cette équation fait voir que la force M doit varier avec la position des parties du système, et qu'on doit appliquer à la bascule des forces Π variables suivant les différentes inclinaisons du tablier : or, le problême qui consiste à trouver pour une position donnée la grandeur du poids Π seroit résolu, si l'un des angles α, β ou γ étant donné, les autres étoient connus. Pour cela, menons les horisontales BN et CO, il est clair que le triangle ANB donne $AN = f \sin\alpha$; faisons $BC = c$, $AG = h$, $GD = a$, $DC = t$, nous aurons de même $NO = c \sin\gamma$, et $GO = t \sin\beta$; on aura donc

$$h + f\sin\alpha = c\sin\gamma + t\sin\beta.$$

Pareillement, en opérant par rapport à GI, on aura

$$a + t\cos\beta = f\cos\alpha + c\cos\gamma.$$

Ces deux équations serviront à completter la solution du problême.

126. Si les points A et D sont dans une même verticale, et si de plus le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, on a $a=0$, $t=f$, $c=h$ et $\alpha=\zeta$, et les trois équations précédentes deviennent

$$bM=\frac{f}{2}(F+T+2C),\ h=c\sin\gamma,\ 0=c\cos\gamma.$$

La première montre que comme la force M ne dépend plus de l'inclinaison du tablier, elle est constante pour toutes les positions qu'il peut prendre. Les deux autres font voir que γ est un angle droit, et que *la chaîne reste toujours verticale*. Le cas le plus ordinaire est celui où la figure est un parallélogramme, sans que néanmoins AD soit vertical : la première des expressions ci-dessus a encore lieu; et les deux autres équations deviennent $h=a\tang\gamma$. Au reste, on auroit pu résoudre ces cas *à priori*, en opérant de la même manière que ci-dessus.

3°. *Des Haquets, etc.*

127. On appelle HAQUETS les longues voitures qui servent au transport du vin et des autres liqueurs. Ces voitures consistent en deux longues pièces de bois, unies par des traverses, posées sur un essieu, autour duquel elles peuvent faire la bascule, et prendre par là une position horisontale ou inclinée. A la partie antérieure est un treuil, destiné à opérer le chargement. C'est à-peu-près aussi de la même manière qu'on retire des caves les tonneaux chargés qu'elles contiennent. AB est une échelle; Fig. 84.
on l'adapte à la porte de la cave, en appuyant ses extrémités d'une part sur la muraille, et de l'autre sur la terre. Une corde, attachée à l'un des échelons CD, après avoir passé sous la tonne H, s'enroule autour d'un cylindre EF, qu'on fait tourner avec des leviers.

Supposons les deux cordons parallèles au plan incliné ; nommons P le poids de la tonne, r le rayon du cylindre, ι l'angle d'inclinaison du plan LN ; enfin, soit Q la puissance motrice ; R le rayon du cercle qu'elle décrit.

1°. Le plan incliné réduit le poids P à $P \sin \iota$ (96, 2°.) ; 2°. comme le tonneau fait ici l'office d'une poulie mobile, le poids est réduit à moitié (109), et est $= \frac{1}{2} P \sin \iota$. Or, ce poids est mis en équilibre par la puissance motrice Q, à l'aide du treuil ; on a donc (110)

$$QR = \frac{1}{2} r P \sin \iota \ldots\ldots (Y'').$$

On peut généraliser le problème précédent ainsi qu'il suit. Soit une courbe FL rapportée à des coordonnées Ax et Ay horisontales et verticales ; et un poids P placé en un point M de cette courbe, sur laquelle il est retenu par une force Q dont l'action est transmise à l'aide du treuil BD. Désignons par R et r les rayons CB et CD de la roue et du cylindre ; par t la tension du cordon PD. Il est clair que pour l'équilibre du treuil, on doit avoir $QR = tr$. Fig. 86.

De plus la tension t retient le poids P sur la courbe FL : soit α l'angle formé par PD avec l'axe Ax, comme $t \cos \alpha$ et $t \sin \alpha$ sont les composantes de t suivant Ax et Ay, le corps P est animé par les deux forces $t \cos \alpha$ et $P - t \sin \alpha$: l'équation de la courbe et la tangente de l'angle ι que fait l'axe Ax avec la touchante GM étant représentées par $y = fx$ et par y', on obtient, pour l'équation (I'', p. 117) où Y tend à diminuer les y

$$t \cos \alpha = (P - t \sin \alpha) y', \quad y' = \operatorname{tang} \iota = \frac{dy}{dx}.$$

Eliminons t à l'aide de $QR = tr$, nous aurons la condition d'équilibre demandée,

$$QR (\cos \alpha + y' \sin \alpha) = Pry' \ldots\ldots (Z'').$$

en tirant de $y = fx$ la valeur de y', et la substituant ici, on obtiendra une relation entre les quantités α, x, P, Q, R et r, laquelle servira à faire connoître l'une d'elles, lorsque les autres seront données.

Quant à l'angle α, on peut le prendre arbitrairement, puisqu'on peut disposer une poulie de renvoi qui, sans rien changer à l'état du système (106), donnera à α une valeur déterminée. Si on veut que la tension t soit parallèle à la tangente GM, il faut faire $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$, $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$, et l'équation ($Z''$) devient

$$QRds = Prdy \text{ ou } QR = Pr \sin \alpha.$$

C'est ainsi que si la ligne FL est droite, $\sin \alpha$ est constant, et on retrouve ce qu'on a déja obtenu (K''). Mais si le point M étant donné, on veut éviter la poulie de renvoi, comme PD est une droite qui, passant par un point connu P, est tangente au cercle CD, il suffit pour obtenir α de chercher la tangente menée au cercle CD par un point pris hors de ce cercle.

4°. *De la Grue.*

Fig. 65. 128. La Grue est composée d'un treuil QN. La corde qui enveloppe le cylindre, a l'une de ses extrémités fixée en I : à l'aide de poulies de renvoi c, e, d, b, elle transmet l'action de la puissance à une poulie mobile a, à la chappe de laquelle est attaché un poids P. La tension du cordon ba est (109) $= \frac{1}{2} P$. Les autres poulies d, e, c, ne font que changer la direction de la puissance ; ainsi le poids que supporte le treuil QN est $\frac{1}{2} P$. Soient R et r les rayons de la roue et du cylindre, Q la puissance agissant sur la roue, on a (110), pour l'équilibre dans la grue, $QR = \frac{1}{2} Pr$.

CHAPITRE IV.

DES OBSTACLES QU'ÉPROUVENT LES PUISSANCES LORSQU'ELLES AGISSENT A L'AIDE DES MACHINES.

I. *Réflexions générales sur les Machines.*

129. QUAND deux forces sont en équilibre, si on augmente l'une d'elles, elle doit prévaloir sur l'autre ; cette observation réduit les conditions du mouvement dans les machines à la théorie de leur équilibre. Cependant, comme les puissances éprouvent différens obstacles, nous allons traiter particulièrement de l'état où un système doit être amené pour que cet équilibre soit sur le point d'être rompu.

Il résulte de ce qu'on a vu dans le chapitre précédent, qu'on peut toujours établir l'équilibre entre deux forces quelconques, et qu'il ne faut pour cela que disposer convenablement les machines dont nous venons d'exposer les propriétés; mais en augmentant ainsi l'effet d'une puissance, on tombe dans un inconvénient inévitable. L'expérience est d'accord en ce point avec la théorie, et on peut établir comme un fait constant que, dans toutes les machines, *on perd du côté du tems ce qu'on gagne du côté de la puissance.* On peut bien faire, par exemple, qu'un seul homme élève le même poids que trente ; mais il sera aussi trente fois plus de tems à l'élever d'une même hauteur. La vérité de ce principe dans le levier est évidente : il en est de même du plan incliné, et c'est par cette raison que pour rendre une route moins rapide, on lui fait prendre divers circuits. Nous avons fait voir (109 et 114) que le principe ci-dessus est vrai dans la poulie et les roues dentées : il est aisé de voir qu'il a également lieu dans le tour et la vis.

En effet, 1°. on a vu (110) qu'on a pour l'équilibre du tour $Pp = Qq$: donc si le rayon p de la roue d'un tour est m fois plus grand que celui q du cylindre, une force P fera équilibre à une résistance Q, m fois plus grande; c'est-à-dire qu'on aura $P = \frac{Q}{m}$. Mais quand le mouvement a lieu, la puissance fait évidemment le tour de la roue ; tandis que la corde en s'enveloppant autour du cylindre, ne fait monter le poids que d'une hauteur égale à la circonférence de ce cylindre; et comme les circonférences sont entre elles comme leurs rayons, il est clair que la force P fait m fois plus de chemin que la résistance Q.

2°. Quand une vis tourne dans l'écrou, pour une révolution entière, elle n'avance dans le sens de son axe que d'une longueur égale au pas : l'équation (R'') n°. 120, est dans le cas d'équilibre $P = \frac{h}{2\pi R} \cdot Q$; en faisant $\frac{2\pi R}{h} = m$, on a $P = \frac{Q}{m}$; ainsi la puissance est m fois moindre que la résistance qui lui fait équilibre : mais pour faire parcourir la hauteur h au poids Q, la force P doit faire une longueur $2\pi R$; ainsi elle fait mh, dans le même tems, c'est-à-dire m fois plus de chemin.

130. Le but n'est pas toujours d'éviter l'emploi du tems, et il arrive souvent que la durée en est assez indifférente : on peut même faire servir avantageusement ce qui, dans beaucoup de cas seroit un obstacle, et tirer parti de l'emploi d'une force donnée de manière à lui faire parcourir un

grand espace. Les organes du mouvement de presque tous les animaux offrent un exemple de la manière dont la nature s'est servi de cette propriété : les muscles ont leurs points d'attache sur les os à la partie qui est voisine des articulations, autour desquelles les os doivent tourner lorsque les muscles se raccourcissent ; il résulte de là que l'autre extrémité des membres parcourt un grand espace. Un procédé semblable peut servir à rendre un très-petit mouvement plus sensible.

Soit, par exemple, une corde *CD*, ayant ses deux extrémités *D* et *C* attachées, la première à un point fixe *D*, la seconde à l'extrémité d'une verge *AC*, mobile autour d'un point *B* voisin de *C*; on tend la corde, en disposant un poids *F* en un point *E* quelconque de la verge. Il est clair que si par quelque cause la longueur de la corde *CD* change, quelque léger que soit le raccourcissement, il sera très-sensible à l'autre extrémité *A* de la verge *AC*; si, par exemple, $AB = 10 \times BC$, l'arc décrit par le point *A* sera dix fois plus grand que l'arc décrit par le point *C* : on se sert de cette disposition dans les *Hygromètres ;* alors le raccourcissement de la corde *CD* est causé par des variations survenues dans l'atmosphère. Fig. 86.

On a dans les *Baromètres* un autre exemple de l'usage qu'on fait de cette propriété. Nous verrons bientôt que le mercure monte et descend dans le tube qui le contient, suivant les variations du ressort de l'air ; mais ces effets sont souvent trop foibles pour être sensibles : c'est pour les amplifier que l'on dispose un cadran ainsi qu'il suit. On suspend à un fil un poids *a* assez léger, et on le fait entrer dans le tube par l'extrémité ouverte *c* : on fait passer le fil sur une poulie *b* ; et un autre poids *f* un peu moindre que le premier, tient ce fil tendu. Comme le poids ne fait que poser sur la surface du mercure, ses variations font Fig. 87.

monter ou descendre ce poids ; la poulie *b* tourne en même-tems et une aiguille fixée sur le même centre que la poulie marque sur la circonférence d'un cadran les différentes pressions de l'atmosphère.

Il arrive aussi quelquefois que la grandeur de la force est presque indéfinie, et qu'on demande que ses effets soient rapides ; le choc de l'eau ou de l'air contre les ailes d'un moulin en sert d'exemple. Mais c'est nous étendre assez sur cet objet, passons maintenant aux résistances que les puissances éprouvent par l'effet des machines mêmes.

II. *Du Frottement.*

151. Lorsqu'un corps est placé sur un autre, les parties saillantes de l'un s'engagent dans les parties rentrantes de l'autre ; les surfaces les mieux polies ne sont pas exemptes de ces petites inégalités. Lorsqu'on veut que l'un des deux corps glisse sur l'autre, il faut donc dégager ces inégalités ou les rompre : la force qu'il faut employer pour vaincre cette résistance, est celle qui va nous occuper ici ; elle doit ou soutenir une partie du poids du corps en le soulevant pour ainsi dire, ou briser les parties qui sont mutuellement engagées : c'est en cela que consiste le *Frottement.*

Le frottement tend donc à détruire les machines, et exige une action plus grande pour faire passer un mobile à l'état de mouvement. Il y en a deux espèces ; la première a lieu lorsqu'un corps doit glisser sur un autre ; la seconde lorsque l'une des deux surfaces juxtà-posées roule sur l'autre : ce dernier frottement est beaucoup moindre que le premier, car on voit que le mouvement de rotation contribue en partie à dégager les aspérités. C'est pour ralentir la vîtesse d'une voiture qu'on *Enraie* lorsqu'on veut descendre une montagne rapide, afin d'augmenter le frottement qui devient par là de la première espèce.

Le frottement tient à une multitude de circonstances que le calcul ne peut seul embrasser, car il faut faire entrer en considération le poli des surfaces, la température et l'humidité de l'atmosphère, l'affinité des subtances, la vîtesse du mouvement, etc. Il faut donc avoir recours à l'expérience pour perfectionner ce qu'elle fera connoître, et prévoir ce qu'elle ne dira pas.

132. Voici ce que l'expérience apprend :

1°. *Le frottement varie pour des surfaces différemment polies.* Ainsi on peut le diminuer en polissant les surfaces, ou en bouchant les pores avec quelques substances qui n'augmentent pas l'adhérence, telles que les huiles, etc.

2°. *Le tems influe sur l'adhérence des corps.* On attribue cette influence du tems à la flexibilité des parties qui composent les corps, qui permet à leurs surfaces de s'engager davantage.

3°. *Deux surfaces de même nature éprouvent un frottement plus grand que deux surfaces de matières différentes également polies.* C'est pour cela qu'on fait rouler les essieux, qui sont d'acier, dans des boîtes de cuivre.

4°. *Le frottement ne dépend pas de l'étendue des surfaces en contact, le poids du corps restant le même.* Ce principe, attesté par l'expérience, paroît d'abord singulier ; cependant on peut observer que, suivant qu'on fait frotter un parallélipipède sur l'une ou l'autre de ses faces, les points de contact sont plus ou moins nombreux, mais que chacun d'eux porte un poids moins ou plus considérable, et il paroît qu'il y a compensation entre ces deux effets. Cependant si le corps frottant étoit terminé par une pointe, comme ce corps traceroit par son poids un sillon sur la surface frottée, ce cas doit être excepté de la règle.

5°. *Le frottement est proportionnel à la pression*, toutes choses égales d'ailleurs ; c'est-à-dire qu'on éprouve une résistance d'autant plus grande que le corps presse davantage. Voici comment on doit entendre cette proposition, qui va servir de fondement à tout ce que nous aurons à dire.

Fig. 88. 133. Soit un corps M placé sur un plan horisontal AB; puisque le poids est entièrement détruit, il est clair qu'abstraction faite de toute résistance, le corps doit obéir au plus léger effort : or le frottement empêche que cela ne soit ainsi. Si on fixe en D une soie passée dans la gorge d'une poulie C, le poids Q, propre à entraîner le corps M sur le plan, devra être quelquefois assez considérable : or il est visible que ce poids Q est ce qui doit mesurer le frottement. On a reconnu que si le corps M pèse 2, 3... fois plus, il faut au lieu de Q mettre un poids précisément double ou triple.... La puissance Q aura donc avec le poids M un rapport constant, en supposant que les surfaces en contact ne changent pas de nature, et c'est dans ce sens qu'on doit entendre ces expressions usitées : le frottement est le tiers, le quart de la pression; pour désigner que le poids Q doit être le $\frac{1}{3}$, ou le $\frac{1}{4}$ du poids M. On conclut de là que

$$Q=fM \;\ldots\ldots\; (A''').$$

équation dans laquelle $M=1$, donne $Q=f$; d'où on voit que la constante f est le poids propre à vaincre le frottement, c'est-à-dire à faire prendre au corps M un mouvement naissant, lorsque ce corps a l'unité de poids.

On a construit des tables propres à marquer les valeurs que prend f, pour les diverses substances les plus communes combinées deux à deux : on peut consulter le Traité de *Brisson*. Nous regarderons le nombre f comme connu, mais l'expérience prouve qu'il n'est constant qu'entre certaines limites; car lorsque les pressions deviennent très-considérables, le coefficient f diminue; et au lieu d'être le tiers ou le quart de la pression, il n'en est quelquefois

ıe le douzième : ainsi, l'équation (A''') n'est pas rigoureu-
ment exacte.

134. Le frottement étant par sa nature une force passive
ont l'effet est de s'opposer à tout mouvement, on doit
stinguer avec soin deux cas : ou la force qu'on consi-
re doit produire le mouvement dans la machine ; dans
cas le frottement lui est contraire, et la puissance doit
re augmentée d'une partie convenable : ou cette force
a pour but que d'établir l'équilibre dans le système,
alors le frottement lui est avantageux. De sorte qu'une
ıissance peut faire équilibre, quoiqu'elle soit moindre
ı'elle ne doit l'être en vertu des principes précédens
Chap. III).

Puisque le frottement est une force dont la direction est
ngente à la surface de contact, pour connoître les con-
tions d'équilibre, en y ayant égard, il ne faut que la
nsidérer comme une puissance ordinaire, et la traiter à
manière des autres forces. On cherchera donc la pres-
on normale qui a lieu au point de contact ; et la multi-
iant par f, on aura une nouvelle force à introduire dans
s calculs, outre celles qui agissent sur la machine.

135. Appliquons d'abord ces principes au plan incliné.
nployons les procédés et la notation du n°. 95 ; la pres- Fig. 46.
on N exercée sur le plan par les forces P' et P'' est
mme on sait $N = P' \sin \theta' + P'' \sin \theta''$, ainsi on a pour
force du frottement $f(P' \sin \theta' + P'' \sin \theta'')$, force di-
gée dans le sens de la longueur du plan, en opposition
ec la puissance P'' que nous supposons être sur le point
produire le mouvement. Ainsi on aura au lieu de l'équa-
on (C''),

$$P'' \cos \theta'' = P' \cos \theta' + f(P' \sin \theta' + P'' \sin \theta'').$$

'où on tire pour la force cherchée

$$P'' = \frac{P'(\cos\theta' + f\sin\theta')}{\cos\theta'' - f\sin\theta''} \ldots\ldots (B''').$$

On peut, en opérant ici comme pour les cas exposés (96), faire prendre à cette expression différentes formes. On trouve par exemple, pour le cas de la pesanteur, où
Fig. 46. $\theta' = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$,

$$P'' = \frac{P'(\sin\varepsilon + f\cos\varepsilon)}{\cos\theta'' - f\sin\theta''} \ldots\ldots (C''').$$

Lorsque P'' agit dans le sens du plan, on a $\theta'' = 0$, d'où

$$P'' = P'(\sin\varepsilon + f\cos\varepsilon) \ldots\ldots (D''').$$

Et lorsque P'' agit horisontalement, $\theta'' = \varepsilon$, et on a

$$P'' = \frac{P'(\sin\varepsilon + f\cos\varepsilon)}{\cos\varepsilon - f\sin\varepsilon} = \frac{P'(\tang\varepsilon + f)}{1 - f\tang\varepsilon} \ldots\ldots (E''').$$

Fig. 46. La théorie du plan incliné fournit un moyen de trouver f, plus simple que celui qu'on a indiqué n°. 133: en effet, quand un poids P est placé sur un plan incliné, faisant avec l'horison l'angle ε, il est clair que $P\sin\varepsilon$ est la composante de ce poids dans le sens du plan, et que $P\cos\varepsilon$ est sa composante perpendiculaire à ce plan : ainsi $fP\cos\varepsilon$ est le frottement ; pour connoître la direction que doit avoir le plan incliné afin que le poids P soit en équilibre à l'aide du seul frottement et sur le point de le perdre, on voit qu'il faut que $P\sin\varepsilon = fP\cos\varepsilon$, d'où on tire

$$f = \tang\varepsilon = \frac{BC}{AC}.$$

Il résulte de là que si on place un corps pesant quelconque sur un plan horisontal, et qu'on incline ce plan jusqu'à ce que le corps prenne un mouvement naissant, l'angle ε

formé par ce plan avec l'horison aura une tangente numériquement égale à f : c'est ce qui a fait appeler dans le cas présent ε *l'angle du frottement.* On peut calculer aisément cette tangente, c'est-à-dire la quantité f; puisqu'il ne faut que diviser la hauteur BC du plan par sa base AC.

136. Traitons maintenant l'équilibre du levier dans l'hypothèse du frottement. Soit HG un levier traversé par un trou circulaire dont le rayon soit $Bm = b$: concevons le levier retenu par un axe ou boulon B, dont le rayon soit sensiblement aussi $= b$: nommons M et R les deux forces qui agissent sur le levier, et considérons la première M comme destinée à prévaloir. Fig. 89.

Il est important de remarquer que les problêmes de cette espèce peuvent toujours être résolus à l'aide des équations d'équilibre ; aussi bien que tous ceux qui sont relatifs aux machines simples. En effet, l'axe fixe qui retient en B le levier, peut être remplacé par une force N, susceptible du même effet, et par conséquent normale en m au boulon, m désignant le point où celui-ci touche le levier. Le système sera donc tenu en équilibre par quatre forces ; savoir : 1°. la résistance R ; 2°. la force M qui lui fera équilibre, et qui sera sur le point de prévaloir sur elle ; 3°. une puissance N normale en m au boulon ; 4° la force du frottement qui est $= fN$, ainsi que l'indique l'expression (A'''), et qui a sa direction tangente en m à l'axe : cette force tend à faire tourner le levier en sens contraire de M. Pour exprimer les conditions d'équilibre, il faut recourir aux équations U n°. 40 : faisons donc passer par le point B, pris pour origine, la droite Bx parallèle à M ; ce sera l'axe des x, les abscisses positives étant comptées de B vers x. Soient α et θ les angles que forment avec cet axe, ou DM, les directions de R et de N ; et m, r les perpendiculaires BC, BA. Les équations U deviennent ici

$$M + R\cos\alpha = N\cos\theta + fN\sin\theta,$$
$$R\sin\alpha = N\sin\theta - fN\cos\theta,$$
$$Mm = Rr + bfN.$$

Les signes des termes sont déterminés d'après les considérations développées nos. 26, 27 et 28, en ayant égard au sens suivant lequel chaque force agit. On peut faire servir ces équations à trouver M, N et θ : en effet, la somme des carrés des deux premières sera

$$M^2 + 2MR\cos\alpha + R^2 = N^2(1 + f^2).$$

Expression qui donnera N quand M sera connue. En substituant pour N sa valeur $\frac{Mm - Rr}{bf}$ tirée de la troisième équation, et faisant, pour abréger.............

$q^2 = \frac{1 + f^2}{f^2} = 1 + \frac{1}{f^2}$, on a

$$(q^2m^2 - b^2)M^2 - 2MR(b^2\cos\alpha + q^2mr) = R^2(b^2 - q^2r^2);$$

d'où on tire, en résolvant l'équation du second degré

$$M = R.\frac{mrq^2 + b^2\cos\alpha \pm b\sqrt{[q^2(m^2 + 2mr\cos\alpha + r^2) - b^2\sin^2\alpha]}}{m^2q^2 - b^2}; \ (F''').$$

Si les forces sont parallèles $\alpha = 0$, et on a

$$M = R.\frac{mrq^2 + b^2 \pm bq(m + r)}{m^2q^2 - b^2} \ldots (G''').$$

Ces deux équations peuvent se simplifier par une considération particulière : comme on ne peut résoudre que par approximation les problêmes relatifs au frottement, on pourra supposer que b^2 est nul, puisque b est toujours fort petit par rapport à m et r : on aura donc

$$\left.\begin{aligned} M&=R\left\{\frac{r}{m}\pm\frac{b}{m^2q}\sqrt{(m^2+2mr\cos\alpha+r^2)}\right\}\\ M&=R\left\{\frac{r}{m}\pm\frac{b}{m^2q}(m+r)\right\}\end{aligned}\right\}\ldots(H'''').$$

Il faut prendre, dans toutes ces formules, le signe supérieur pour le cas où la force M doit être sur le point de prévaloir, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Lorsqu'on ne fait point entrer le frottement en considération, on peut traiter la question de l'équilibre par la méthode précédente : on voit que sans parler de l'élégance de cette solution, elle a beaucoup plus de généralité que celle qui a été donnée (104), puisqu'on peut y regarder comme inconnues trois quelconques des quantités M, R, α, θ, N, m et r. Il nous suffira ici de faire $f=0$, et nous aurons $q=\infty$, d'où

$$M=R\times\frac{r}{m},\quad N=\sqrt{(M^2+2MR\cos\alpha+R^2)},$$

l'expression $M=R\times\frac{r}{m}$ comparée aux équations (H''''), montre de combien M doit être augmentée pour être sur le point de prévaloir, ou doit être diminuée pour faire seulement équilibre, en ayant égard au frottement.

Nous avons supposé ici que l'axe ne faisoit pas corps avec le levier ; mais il n'en est pas ainsi dans beaucoup de cas, tels que dans les canons, mortiers à bombes, etc. Alors cet axe est mobile dans des crapaudines fixes. Il est aisé de voir que le système est le même que ci-dessus, excepté que le point de contact étant à l'opposite en n, la force fN, qui provient du frottement, doit être appliquée en ce point, et dirigée en sens contraire. Ces considérations font voir que le problème est ici le même que ci-dessus, excepté que f doit y être mis avec un signe différent. Or, comme les résultats que nous venons d'obtenir ne renferment que f^2 ils ont encore lieu pour ce cas.

137. Le problème de la poulie avec ou sans frottement, pourroit être résolu de la même manière; mais il est plus simple de faire les deux bras de levier égaux, ou $m=r$, cette considération change les équations F''', G''', H^{IV}, respectivement en

$$M=R.\frac{m^2q^2+b^2\cos\alpha\pm b\sqrt{[2m^2q^2(1+\cos\alpha)-b^2\sin^2\alpha]}}{m^2q^2-b^2}$$

$$M=R\ \frac{m^2q^2+b^2\pm 2\,mbq}{m^2q^2-b^2}.$$

$$M=R\left(1\pm\frac{2\,b}{mq}\times\cos\tfrac{1}{2}\alpha\right),\ M=R\left(1\pm\frac{2\,b}{mq}\right).$$

138. On pourroit résoudre le problème du frottement dans le treuil de la même manière; mais ici les forces étant disposées dans l'espace, il faudroit appliquer les six équations (X), (Y), n°. 43. L'élimination seroit alors fort laborieuse; et on auroit pour résultat une équation du quatrième degré si compliquée, qu'elle ne pourroit être d'aucune utilité. Au reste, on peut appliquer ici, d'une manière assez exacte, ce qui vient d'être dit sur le levier, puisque si on projette tout le système sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, on n'a plus à considérer que des forces dans un même plan, appliquées à un levier. Nous ne nous arrêterons pas plus longtems sur cet objet.

139. Traitons maintenant le frottement dans la vis: pour cela, comme on l'a fait (120), supposons d'abord

que l'écrou ne touche la vis qu'en un point, et conservons les notations employées dans ce paragraphe. Pour trouver la force horisontale M propre à retenir le poids Q sur le plan incliné bd, en ayant égard au frottement, il faut avoir recours à l'équation (E''') Fig 75 et 76.

$$M = \frac{Q(\text{tang}\, \varepsilon + f)}{1 - f \,\text{tang}\, \varepsilon}.$$

Mais $\text{tang}\, \varepsilon = \frac{cb}{cd} = \frac{h}{2\pi r}$, ainsi $M = Q\,\frac{h + 2f\pi r}{2\pi r - fh}$; il faut maintenant remplacer la force auxiliaire M par la force P qui retient en effet le poids de l'écrou en équilibre, en agissant à l'extrémité d'un levier : or, on a $PR = Mr$; donc

$$PR = Qr \times \frac{h + 2f\pi r}{2\pi r - fh} \ldots\ldots\ldots (I''').$$

Nous sommes parvenus à cette valeur en suivant le procédé employé n°. 120; mais comme nous nous sommes servi d'élémens différens, le résultat ne fournit plus la même conséquence : en effet, nous avons supposé, comme au n°. 120, que l'écrou et la vis n'avoient qu'un point de contact; mais l'équation (I''') n'a pas la propriété de ne pas contenir r, comme la valeur (R''). Nous ne pouvons donc plus employer les considérations dont nous nous sommes servi pour passer au cas où l'écrou touche la vis en plusieurs points. Mais par une hypothèse fort simple, on peut avoir une approximation suffisante; car on peut imaginer que le poids entier de l'écrou soit concentré sur l'une des hélices qu'on pourroit tracer sur la vis. Par exemple, quand il s'agira d'une vis à filet carré, on pourra supposer, sans erreur sensible, que tout le poids est porté par une hélice tracée au milieu de la largeur du filet. Ainsi on n'aura plus à considérer que des poids portés par une hélice, tracée sur un cylindre, qui a r pour rayon de sa base : la formule (I''') reçoit donc son application immédiate ; car en continuant les raisonnemens employés n°. 120, cette équation ne seroit nullement changée par l'hypothèse d'un nombre indéterminé de points de contact de l'écrou avec la vis, ainsi qu'on l'a observé pour l'équation (R'').

III. *Roideur des cordes.*

Fig. 90. 140. Comme les cordes ne sont pas parfaitement flexibles, lorsqu'on les emploie dans les machines, il faut augmenter la force qui doit être prépondérante : voici l'idée qu'il faut se faire de cette augmentation. Soient deux poids P et Q sur une poulie : si P prévaut, il est clair que la corde NQ doit d'une part, se courber en C dans la gorge de la poulie, et de l'autre se déployer, pour devenir verticale en MP. Or, si cette corde étoit absolument rigide, ce double effet n'auroit pas lieu, et d'un côté le poids Q se trouveroit porté verticalement au-dessous de quelque point D de la droite horisontale CB, tandis que de l'autre côté, au contraire, le poids P seroit transporté au-dessous d'un autre point b : et comme le bras du levier de l'une des forces devenant plus grand, celui de l'autre seroit au contraire rendu plus petit, on n'auroit plus $P = Q$ pour la condition de l'équilibre.

Si la corde n'est qu'en partie rigide, l'effet ci-dessus indiqué n'a pas lieu en entier : on a observé même que dans la pratique, le raccourcissement du bras de levier en B étoit sensiblement nul, c'est-à-dire qu'on pouvoit ne pas avoir égard à celui des deux effets, qui est produit par le défaut de flexibilité de la partie BP correspondante au poids P, qui est supposé prévaloir. Ainsi *pour faire entrer en considération la roideur de la corde employée dans une machine, il ne faut qu'augmenter le bras de levier de la résistance d'une quantité convenable.*

Il reste maintenant à connoître cette quantité $CD = q$: pour cela, observons qu'un corde résiste par deux causes aux efforts qu'on fait pour la ployer. La première est due à la tension de la corde et lui est proportionnelle, elle sera donc $= bQ$; la seconde est produite par son ourdissage, et on peut représenter par a la force nécessaire pour la vaincre. a et b sont ici, comme on voit, des coefficiens indéterminés. Ainsi pour une même corde $a + bQ$ pourra représenter la force nécessaire pour la fléchir. Mais si on change de corde, le diamètre D sera différent, et on pourra dire que, toutes choses égales d'ailleurs, la force qu'on doit employer est proportionnelle à une certaine puissance n de D; car la force nécessaire pour ployer une corde croît avec son diamètre : cette puissance décroît, au contraire, avec le rayon r de la poulie; $\frac{D^n}{r}(a + bQ)$ pourra donc représenter la force nécessaire pour vaincre la roideur de toute corde : n est encore une quantité indéterminée. Cette valeur est l'accroissement qu'on doit donner à la force P pour qu'elle soit sur le point de prévaloir; or on a d'ailleurs $Pr = Q(r + q)$: et comme dans le cas d'équilibre $P - Q = 0$, $P - Q$ ou $Q \times \frac{q}{r}$ est aussi la valeur de cet accroissement; en égalant on a

$$D^n(a + bQ) = Qq, \text{ d'où } q = \frac{D^n}{Q}(a + bQ) \ldots\ldots (K''').$$

141. Cette équation n'est, il est vrai, fournie que par des considérations générales, et n'est pas rigoureusement

démontrée ; elle renferme d'ailleurs des coefficiens inconnus, n, a, b, variables d'une corde à une autre. Mais il est un moyen de trouver ces coefficiens, et de s'assurer que cette expression est exacte dans la pratique.

On choisira une corde, et la ployant sur la gorge d'une poulie, on lui fera porter deux poids ; on augmentera l'un d'eux convenablement, on verra de combien il doit excéder l'autre, pour être sur le point de prévaloir : faisant la même expérience quatre fois, en changeant de poids ou de poulie, on aura aussi quatre valeurs de $P - Q$, c'est-à-dire de $\frac{D^n}{r}(a + bQ)$, ce qui fournira quatre équations. Soient d, f, g, h ces valeurs, on aura donc en désignant par r, r', r'' et r''' les divers rayons des poulies, et par Q, Q', Q'' et Q''' les poids employés tour-à-tour,

$$d = \frac{D^n}{r}(a + bQ), \quad f = \frac{D^n}{r'}(a + bQ'),$$

$$g = \frac{D^n}{r''}(a + bQ''), \quad h = \frac{D^n}{r'''}(a + bQ''').$$

Les trois premières serviront à faire connoître les valeurs de n, a et b ; et la dernière servira à s'assurer si la formule (K''') a l'exactitude qu'on desire.

Coulomb, à qui on doit cette ingénieuse théorie, a trouvé que la quantité n étoit ordinairement $1,7$ ou $1,8$, et que par conséquent la résistance étoit à-peu-près proportionnelle au carré du diamètre de la corde ; mais elle varie d'ailleurs, et devient même $1,4$ lorsque la corde est très-usée. Voici les résultats auxquels il est parvenu exprimés en poids anciens :

Corde blanche.	de 30 fils de carret	$\frac{D^n}{r} \times a = 4,2..$ liv.	$\frac{D^n}{r} b \times 100 = 9$ liv.
	de 15 fils	$= 1,2..$	$= 5,1$
	de 6 fils........	$= 0,2..$	$= 2,2$
Corde goudronnée.	de 30 fils de carret	$= 6,6..$	$= 11,6$
	de 15 fils......	$= 2,0..$	$= 5,6$
	de 6 fils.......	$= 0,4..$	$= 2,4$

IV. *Frottement d'une corde qui s'enroule autour d'un cylindre.*

142. Soit *BAN* le profil d'un cylindre, dont le rayon *LC* $= r$: *AR* une des extrémités de la corde, à laquelle est appliquée la résistance *R*: la puissance *P*, qui tend à vaincre cette résistance, est supposée agir à l'autre extrémité de la corde, qui est enroulée autour du cylindre, sur un arc quelconque *AGN*; cette puissance étant sur le point de prévaloir, fait par conséquent équilibre à la résistance *R* et à la force provenant du frottement exercée sur l'arc embrassé par la corde. La tension t en un point quelconque *B* de cet arc est aussi dans le même cas; elle consiste en une force tangente en *B*, qui doit être égale (par la nature de la poulie fixe qui ne sert qu'à changer les directions des forces (106)) à la résistance *R*, plus au frottement qui s'exerce depuis ce point *B* jusqu'en *N*. Soit *NB* $= s$, et prenons un arc infiniment petit *LB* $= ds$, partagé en deux parties égales au point *G*; menons les rayons *CB*, *CG*, *CL*, et nommons p la somme des pressions normales qui s'exercent sur tous les élémens de l'arc *BN*: la pression normale qui s'exerce sur *LB* sera $= dp$. Fig. 55 bis.

Cela posé, la tension de chacun des demi-élémens *GB*, *GL* étant désignée par t, la pression dp qui en résulte, c'est-à-dire la résultante de ces tensions, prise dans la direction *GC*, est (17) visiblement $= 2t \cos CGB$; mais en considérant le triangle CGB comme rectangle en B, on a dans ce triangle, $\cos CGB = \frac{GB}{GC} = \frac{ds}{2r}$; donc $dp = \frac{tds}{r}$. Mais d'après ce qu'on a dit ci-dessus, f désignant le frottement, on a (153) $t = R + fp$, d'où on tire $fdp = dt$; mettant pour dp sa valeur, on en conclut $\frac{dt}{t} = \frac{fds}{r}$, dont l'intégrale est $\log t = \frac{f}{r} s + \log . C$. Comme $s = 0$ donne $t = R$, on a $C = R$, donc $\log \frac{t}{R} = \frac{fs}{r}$; et en désignant par e le nombre dont le logarithme népérien est 1, on en conclut

$$t = Re^{\frac{fs}{r}} \ldots\ldots\ldots (L''').$$

C'est l'expression de la tension qu'éprouve le point B. Si on veut avoir la grandeur de la puissance P, qui fait équilibre, et est sur le point de prévaloir, il faut faire $s = AGN$, et $t = P$. S'il arrivoit que AGN, ou la longueur de la corde qui embrasse le cylindre, fût égale à n fois la circonférence entière, c'est-à-dire que la corde fit plusieurs tours sur ce cylindre, on feroit $s = 2\pi rn$; ainsi on auroit dans ce cas

$$P = Re^{2\pi fn} \ldots\ldots\ldots (M''').$$

Si on fait croître le nombre n en progression par différence, la valeur P croît en progression par quotient; et plus le nombre de tours de la corde autour du cylindre est considérable, plus la force P doit être grande. La rapidité avec laquelle croît la grandeur de P, sert à expliquer la cause qui permet à une puissance R, très-foible, de faire équilibre à une puissance P très-considérable.

Fin de la Statique.

LIVRE II.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement d'un point en ligne droite.

143. En voyant les choses qui nous environnent commencer et finir, nous acquérons l'idée de la succession: telle est l'origine de la notion du tems. Le tems n'est point un phénomène particulier, c'est l'impression que laisse dans notre mémoire une suite d'événemens dont nous sommes certains que l'existence a été successive : la notion du mouvement est donc liée naturellement à l'idée du tems. De là on conçoit bientôt des tems égaux entre eux, puisqu'on peut se représenter des successions d'effets identiquement les mêmes. Les oscillations d'un pendule nous en offrent un exemple, en négligeant cependant le frottement, la résistance de l'air, et les autres causes accidentelles qui empêchent le mobile d'être dans le même état avant et après chaque oscillation.

Jusqu'ici nous avons fait abstraction du tems, et c'est le propre de la Statique ; car on n'y considère que des forces qui s'entredétruisent, et on les regarde comme de simples pressions. La Dynamique *est la partie de la Mécanique qui, faisant entrer le* tems *en considération, a pour objet l'action des forces sur les corps solides, lorsqu'il* *résulte de cette action un mouvement.* Fidèles à la marche que nous avons suivie dans la Statique, et que nous avons développée (6), nous ne traiterons dans ce chapitre que du *mouvement rectiligne d'un point*, afin de ne pas combiner à-la-fois tous les élémens qu'embrasse en général la Dynamique : nous passerons dans les chapitres suivans à des considérations plus étendues.

I. *Du Mouvement Uniforme.*

144. LA LOI D'INERTIE (4) nous apprend que lorsqu'une force unique agit sur un corps par une simple impulsion, ce mobile décrit la direction de la puissance d'un mouvement tel que ce corps se retrouve sans cesse dans les mêmes circonstances que lorsqu'il a quitté le repos : c'est-à-dire que si pendant un tems quelconque t le corps a décrit l'espace e, il devra décrire ce même espace e, durant des tems t successifs égaux. Lorsqu'une force impulsive agit sur un point matériel, le mouvement qu'elle produit est appelé UNIFORME, et le point parcourt *des espaces égaux dans des tems égaux*, quels que soient d'ailleurs ces tems. Le plus simple de tous les genres de mouvement nous conduira à l'analyse des autres.

Lorsqu'un corps se meut uniformément, il parcourt dans chaque unité de tems le même espace que nous désignerons par V. L'espace que parcourra un mobile pendant un nombre t d'unités de tems, sera donc Vt; et il est visible que cela aura lieu quel que soit t, (entier ou fractionnaire) : de sorte que *dans le mouvement uniforme les espaces parcourus sont proportionnels aux tems employés*
Fig. 91. *à les parcourir.* Si donc la droite AE est celle que le mobile décrit, B étant son point de départ, ou plutôt sa position à l'instant où on compte $t = 0$; X étant le lieu du

mobile au bout du tems t, on a $BN = Vt$. Soit un point fixe A auquel on rapporte les positions successives du mobile; en désignant par e sa distance AN à ce point au bout du tems t, et par E l'espace initial AB, il est clair qu'on a

$$e = E + Vt \ldots\ldots (a)$$

pour l'équation générale des mouvemens uniformes. Ces mouvemens diffèrent d'ailleurs entre eux par les valeurs des constantes E et V. Si le mobile, au lieu de s'éloigner de l'origine A, s'en approchoit, V seroit négatif; à moins que le point de départ ne fut situé en B' de l'autre côté; car alors le signe de V seroit encore positif; mais celui de E seroit négatif.

145. On a donné à la constante V le nom de VÎTESSE; c'est, comme on a vu, *l'espace parcouru pendant une unité de tems*. On a aussi une autre expression de la vîtesse, car Vt ou l'espace BN décrit durant le tems, est égal à $e - E$; or on a $V = \frac{e - E}{t} = \frac{BN}{t}$: ainsi *la vîtesse est le rapport constant qui existe entre un espace quelconque et le tems employé à le décrire*. On ne doit pas oublier qu'on ne peut entendre ici par e et t que des nombres abstraits, qui sont des nombres d'unités d'espace et de tems : ainsi on ne compare pas entre elles des choses hétérogènes, comme l'énoncé précédent et l'équation (a) semblent l'indiquer : il n'est point d'expression algébrique qui ne donne lieu à une pareille remarque.

146. Cherchons dans la nature du mouvement uniforme, une quantité propre à mesurer l'intensité de la force impulsive à laquelle il est dû : pour cela observons que les forces ne peuvent nous être connues que par les effets qu'elles produisent, c'est-à-dire par les espaces qu'elles font décrire dans des tems déterminés : il est donc naturel de

prendre pour leur mesure la vîtesse qu'elles engendrent, ou l'espace qu'elles font décrire dans chaque unité de tems; mais cela suppose que *les forces sont proportionnelles aux vîtesses qu'elles impriment.* Or c'est ce que nous ne pouvons pas savoir *à priori*, vu notre ignorance sur la nature des forces. Il faut donc ici recourir à l'expérience, car tout ce qui n'est pas une suite nécessaire du peu de données que nous avons sur la nature des choses, n'est pour nous qu'un résultat de l'observation. Comme cet objet sort des bornes d'un Traité élémentaire, nous n'entrerons à cet égard dans aucun détail : on consultera la *Mécanique céleste*, nos. 5 et 24. On y verra comme son célèbre auteur déduit ce principe d'un fait donné par l'observation, qui consiste en ce que tout corps terrestre auquel on imprime une impulsion de grandeur et de direction quelconques, reçoit le même mouvement relatif que si la terre étoit fixe, bien qu'il soit emporté par le mouvement de celle-ci. On tire de là diverses conséquences.

1°. *Une force agissant par impulsion sur un mobile, lui imprime un mouvement uniforme et rectiligne, et la vîtesse qui a lieu dans ce mouvement mesure l'intensité de la force*; ainsi la vîtesse V est ce qui caractérise en particulier chaque espèce de force, chaque espèce de mouvement uniforme.

2°. Soient F et f deux forces, V et v les vîtesses qu'elles impriment à *deux mobiles identiques*, on aura $\frac{F}{f}=\frac{V}{v}$.

Soit donc α le rapport constant $\frac{f}{v}$ d'une force à sa vîtesse, on a $F=\alpha V$. On auroit de même $F'=\alpha V'$, $F''=\alpha V''$... si toutes ces forces agissent simultanément sur le même corps, la force φ qui leur équivaut étant $=F+F'+F''+\ldots$ est aussi $=\alpha(V+V'+V''+\text{etc.})$.

Soit u la vîtesse qui résulte de la force φ, on a $\varphi = \alpha u$; donc $u = V + V' + V'' +$ etc. Ainsi *plusieurs forces agissant dans le même sens sur un mobile, feront parcourir durant une unité de tems, un espace égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait parcourir séparément.*

3°. D'après la nature du mouvement uniforme, le mobile est à chaque instant dans les mêmes circonstances que lorsqu'il a quitté le repos; de sorte qu'à chaque point de la ligne qu'il parcourt, on peut le regarder comme en repos, et supposer que la force qui l'avoit animé le sollicite dans cet état. Si donc une force agit sur un corps déja en mouvement, la vîtesse s'accroît de ce qu'elle lui auroit communiqué s'il eût été en repos, puisqu'on peut supposer que les deux forces agissent ensemble.

4°. La vîtesse étant proportionnelle à la force, ces deux quantités peuvent être représentées l'une par l'autre, et tout ce que nous avons établi précédemment (17, 18) sur la composition des forces, doit être dit de la composition des vîtesses. Lorsque deux forces P et Q agissent simultanément sur le mobile A dans les directions AD et AH, en prenant ces longueurs égales aux vîtesses respectives que les impulsions tendent à communiquer, le corps A doit se mouvoir uniformément suivant la diagonale AG du parallélogramme $ADGH$, et cette diagonale sera la vîtesse qui aura lieu. De même, si trois forces P, Q et S dans des plans différens, tendent à imprimer des vîtesses AB, AD et AC, le mouvement du point A sera uniforme suivant la diagonale AI du parallélipipède $ALMH$; et cette diagonale sera la vîtesse. Fig. 8 et 10. Fig. 13.

5°. Si les directions de deux forces P et Q sont rectangulaires, on peut les supposer destinées à éloigner le mobile A, durant l'unité de tems, des quantités AD et Fig. 8.

AH des directions respectives AQ et AP. Or, puisque ces deux forces, par leur action simultanée, transportent le point A en G, et qu'on a $GD = AH$, et $GH = AD$, on voit que l'effet que chaque force tendoit à produire isolément a encore lieu. De même, si le parallélipipède
Fig. 13. $ALMH$ est rectangle, considérons la force Q comme destinée à éloigner le point A du plan BAC de la quantité AD, durant l'unité de tems ; or à cause de $AD = IH$, cet effet est produit. Donc en général *quand des forces de directions rectangulaires agissent sur un point matériel, l'effet qu'elles produisent est le même que celui que chacune auroit produit séparément*, en n'oubliant pas quel sens on doit attacher au mot *effet*. C'est en cela que consiste l'indépendance entre les forces rectangulaires.

147. Considérons les mouvemens de plusieurs mobiles mus uniformément : on aura pour chacun d'eux des équations de la forme $e = E + Vt$, qu'il faudra combiner entre elles convenablement. En voici quelques exemples :

I. Rapportons deux mobiles à leurs points respectifs de départ pour origine des espaces, les équations de leurs mouvemens seront $e = Vt$, $e' = V't'$: on conclut de là que, *en tems égaux, les vîtesses sont proportionnelles aux espaces parcourus ;* car $t = t'$ donne $\frac{e}{e'} = \frac{V}{V'}$. *Si les vîtesses sont égales, les espaces parcourus sont proportionnels aux tems ;* car $V = V'$ donne $\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'}$: *et si les espaces sont égaux, les vîtesses sont réciproques aux tems ;* car $e = e'$ donne $Vt = V't'$.

II. Soient V et V' les vîtesses de deux mobiles, distans entre eux de E' lorsque $t = 0$; cherchons au bout de quel tems ils seront distans l'un de l'autre de K. Il est clair qu'il faut pour cela qu'on ait $e - e' = K$, ou $e' - e = K$; ainsi le problême a deux solutions, l'une avant, l'autre après le point de rencontre. Pour les cumuler toutes deux, faisons donc $t=t'$ et $e-e'=\pm K$, dans leurs équations $e=Vt$ et $e'=E'+V't'$; elles donneront

$$t=t'=\frac{E'\pm K}{V-V'},\ e=V\times\frac{E'\pm K}{V-V'},\ e'=\frac{VE'\pm V'K}{V-V'};$$

$K=0$ donne pour la rencontre des mobiles

$$t=t'=\frac{E'}{V-V'},\quad e=e'=\frac{VE'}{V-V'}\ \ldots\ldots\ldots (b).$$

III. Le mouvement d'un mobile est déterminé lorsqu'on connoît les valeurs des deux constantes E et V qui entrent dans son équation, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on donne des conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Si, par exemple, dans le problême précédent, au lieu de donner E', on disoit seulement que le second mobile étoit éloigné de l'origine, au bout du tems τ, de la quantité ι, l'équation $e=E'+V't$ deviendroit, en mettant ces valeurs pour t et e, $\iota=E'+V'\tau$; d'où on tire $E'=\iota-V'\tau$. Si on veut obtenir une solution plus générale des problêmes précédens, on substituera $\iota-V'\tau$ à E', dans les équations auxquelles nous avons été conduits.

IV. Soient deux mobiles assujettis à décrire uniformément la même courbe. Pour trouver le point de rencontre, il est clair qu'il suffit de concevoir la courbe rectifiée, et de recourir aux équations (b). Mais si la courbe est fermée, les mobiles, en continuant de se mouvoir, se rencontreront de nouveau : le lieu de la première rencontre est alors pris pour point de départ, et pour y appliquer les mêmes formules, il suffit de regarder alors les deux mobiles comme distans du périmètre entier p de la courbe. L'instant de la seconde rencontre est $t = \frac{p}{V - V'}$, et on auroit pour le tems T écoulé depuis l'origine du mouvement $T = \frac{E' + p}{V - V'}$. En continuant ce raisonnement, on aura la troisième rencontre; etc.... En général la n^{eme}. rencontre aura lieu au bout du tems $T = \frac{E' + (n - 1)\,p}{V - V'}$, et les espaces parcourus par chaque mobile depuis son point de départ jusqu'au lieu de la n^{eme}. rencontre, seront

$$e = V \times \frac{E' + (n - 1)\,p}{V - V'},\quad e' = \frac{VE' + V'p\,(n - 1)}{V - V'}.$$

On pourroit prendre un plus grand nombre de mobiles.

A l'aide de ces formules, on détermine l'instant où les aiguilles d'une montre qui marque les heures et les minutes, se doivent rencontrer, puisqu'on peut regarder les extrémités des aiguilles comme des points qui parcourent la même circonférence.

II. *Du Mouvement Varié en général.*

148. *Tout mouvement qui n'est pas uniforme est appelé* VARIÉ; et on dit que ce mouvement est *Accéléré* ou *Retardé*, suivant que les espaces parcourus dans des tems égaux successifs, sont de plus en plus grands, ou de plus en plus petits.

Pour avoir une idée nette du mouvement varié d'un mobile, il faut le concevoir continuellement soumis à l'action d'une force, de sorte qu'il en reçoive à chaque instant une nouvelle impulsion : sans ces actions réitérées, le mouvement seroit uniforme, et on voit que la force agissant sans interruption sur le mobile, on peut supposer, sans qu'il en résulte d'erreur sensible, que ces impulsions sont séparées entre elles par des tems dont la durée est infiniment petite. En effet, représentons l'espace que fait décrire une force sans cesse agissante, par l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse représente le tems; cette courbe se change en un polygone d'un grand nombre de côtés, lorsqu'on suppose que la force exerce ses actions successives en laissant entre elles des intervalles de tems très-petits; et on obtient un polygone d'une infinité de côtés lorsqu'on suppose ces intervalles égaux entre eux et à l'élément du tems dt. Nous avons dans la pesanteur, les attractions,... des exemples de forces continues.

149. Si on suppose qu'au bout d'un tems quelconque t, la force cesse tout-à-coup d'agir, le mouvement du point devient sur-le-champ uniforme, et la vîtesse, dans ce mouvement, est produite par les impulsions exercées durant le tems qui a précédé; cette vîtesse, ou l'espace que le corps parcourt dans chaque unité de tems, est ce qu'on appelle la vîtesse du corps au bout du tems t. Cela n'est point une chose de pure définition, et en réfléchissant attentivement, on verra que nous ne nous formons pas une autre idée de la vîtesse variable d'un corps : toutes les impulsions se sont ajoutées (146, 3°), et dans le mouvement uniforme qui s'est établi, la vîtesse est celle qu'auroit produite une force unique égale à la somme de ces impulsions réitérées. Ainsi *dans un mouvement varié, la vîtesse d'un mobile à un instant déterminé, est l'espace qu'il décriroit durant chaque unité de tems, si tout-à-coup à cet instant la puissance cessoit d'agir.* Soient v cette vîtesse, e l'espace décrit pendant le tems t, ou la distance du corps

à l'origine après ce tems, de sera l'espace décrit pendant l'élément de tems dt; et puisque le mouvement est devenu uniforme, dans chacun des élémens de tems suivans le mobile devra parcourir le même espace de; de sorte que celui qui sera décrit durant une unité de tems, sera de pris autant de fois que dt est contenu dans l'unité de tems, ou $de \times \frac{1}{dt}$; donc

$$v = \frac{de}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Ainsi *dans tout mouvement varié, la vîtesse est le coefficient différentiel du premier ordre de l'espace, ou, l'élément de l'espace divisé par l'élément du tems.* Si donc on désigne par $e = ft$, l'équation qui exprime la relation entre les espaces e et les tems t dans le mouvement qu'on considère, on obtiendra aisément, en fonction du tems t et par une simple différentiation, la vîtesse $v = f' t$. Et réciproquement si on a l'équation $v = f' t$, il ne faudra qu'une simple intégration de l'équation $de = dt . f' t$, pour obtenir l'équation du mouvement $e = ft$. Du reste, si le corps s'éloigne de l'origine des e, v sera positif, parce que e et t croissant ensemble, de et dt sont de même signe. Le contraire auroit lieu si le corps s'approchoit de l'origine des e, et v seroit négatif.

150. Comme l'effet d'une force connue sur un mobile est de lui communiquer par ses actions successives une vîtesse finie, au bout d'un tems fini, et comme le nombre de ses impulsions est infini, chacune d'elles doit être infiniment petite. Ainsi on ne peut établir de comparaison entre une force d'impulsion et une force continue, puisque l'effet instantané de la première est fini, tandis que celui de l'autre est infiniment petit. C'est ce que nous aurons occasion de mieux développer par la suite (222, 234).

151. Il arrive souvent que l'intensité de la puissance varie à chaque instant, alors le mouvement éprouve des variations qui dépendent de celles que subit la force. Cherchons la relation qui existe, en général, entre la vîtesse et la *Force Accélératrice*, (c'est ainsi qu'on nomme la puissance dont l'action continue fait varier le mouvement). Soient F et f deux puissances qui par leurs impulsions seroient capables de donner les vîtesses V et v; concevons le tems τ partagé en un nombre quelconque n d'intervalles égaux, et supposons que les forces F et f agissent continuellement, et communiquent leurs impulsions V et v, à la fin de chacun de ces intervalles. Il est clair que les vîtesses engendrées seront successivement V, v; $2V, 2v$; $3V, 3v$; ... ainsi au bout du tems τ, nV et nv seront les vîtesses engendrées par l'action continue des puissances. Mais on a (146, 2°.), $\frac{F}{f} = \frac{V}{v}$; ou $\frac{F}{f} = \frac{nV}{nv}$; donc les forces accélératrices constantes sont proportionnelles aux vîtesses qu'elles engendrent pendant des tems égaux, puisqu'ici le tems qui sépare les actions successives est aussi petit qu'on veut. Soit α le rapport constant $\frac{f}{nv}$, on a $F = \alpha \times nV$; ainsi une force accélératrice constante est mesurée par la vîtesse qu'elle imprimeroit à un mobile sur lequel elle agiroit durant une seule unité de tems : α est $= 1$ lorsqu'on prend $f = 1$ et $nv = 1$, c'est-à-dire lorsqu'on prend pour unité de force celle dont l'action continue durant une unité de tems seulement, communiqueroit des impulsions telles que le mouvement uniforme qui en résulteroit auroit un pour vîtesse : alors $F = nV$.

152. Comme pour mesurer les puissances, il faut trouver dans le mouvement qu'elles engendrent une quantité qui leur soit proportionnelle, il suit de ce qu'on vient de dire

que pour mesurer l'intensité de la force accélératrice φ au bout du tems t, il faut supposer qu'elle devient tout-à-coup constante pendant l'unité de tems, et prendre la vitesse qu'elle engendreroit dans cet état.

Cela posé, il est clair que pendant l'instant dt qui suit le tems t, la force φ communiquera la vîtesse dv; mais si cette force devient tout-à-coup constante, elle continuera d'imprimer à la fin de chaque élément de tems la même vîtesse; donc la vîtesse qui sera produite pendant l'unité de tems sera l'élément dv, pris autant de fois que la force a donné d'impulsions, c'est-à-dire autant de fois que l'unité de tems contient l'élément dt; le produit de dv par $\frac{1}{dt}$, sera donc la vîtesse qu'aura engendrée pendant l'unité de tems la force φ devenue constante. On a donc

$$\varphi = \frac{dv}{dt} \ldots\ldots\ldots (d)..$$

Ainsi dans tout mouvement varié *la force accélératrice est le coefficient différentiel du premier ordre de la vîtesse*, ou *l'élement de la vîtesse divisé par l'élément du tems*. Mais on ne doit point oublier que φ n'est point ici la valeur absolue de la force, mais seulement une quantité qui lui est proportionnelle, et lui sert de mesure; et comme en mécanique on n'a besoin que du rapport des forces entre elles, ou avec l'une d'elles prise pour unité, cette quantité φ suffit à nos besoins. Si la force φ est accélératrice, la vîtesse croit avec le tems, dv et dt sont de même signe; ainsi φ est positif : le contraire a lieu lorsque la force est retardatrice, car φ est alors négatif.

On peut remarquer qu'en multipliant entre elles *les deux équations du mouvement*

$$de = vdt, \quad \varphi dt = dv$$

on obtient

$$\varphi de = vdv \ldots\ldots (e);$$

autre relation entre les variables, qui remplace souvent avec avantage l'une des équations du mouvement, en se prêtant plus commodément au calcul.

155. On fait un très-fréquent usage des équations précédentes. Si on connoît l'équation $e = ft$ du mouvement, une première différentiation ayant déja fait connoître la vîtesse en fonction du tems, $v = f't$, une seconde différentiation fera connoitre la force accélératrice $\varphi = f''t$. Mais le problême inverse se présente beaucoup plus souvent : c'est ordinairement la force qui est donnée en fonction du tems, et il s'agit alors d'en déduire, par des intégrations, la vîtesse, et l'équation $e = ft$ du mouvement. Pour bien saisir la marche qu'on doit suivre dans ce cas, observons que la nature de la question fournit toujours une relation particulière entre la force φ, la vîtesse v et l'espace e, qui correspondent au tems t; ou seulement entre deux ou trois de ces quantités qui sont les seules variables de cette question : cette relation, exprimée par une équation, caractérise le problême et lui est essentiellement propre. On joint cette équation à celles $de = vdt$, $dv = \varphi dt$; et à l'aide du calcul intégral, en éliminant entre ces trois équations, on en obtient des relations entre deux quelconques des quatre variables φ, v, e et t. L'intégration force quelquefois à préférer l'équation $\varphi de = vdv$, à l'une des deux qui précèdent : cela arrive lorsque φ est donné en fonction de e, parce que les variables sont sur-le-champ séparées. L'intégration des équations effectuée, on obtient des relations qui renferment des constantes arbitraires qu'il est facile de déterminer d'après la connoissance de la vîtesse

du corps et de sa position à un instant donné. Des applications rendront cette exposition plus lucide. (Voy. art. IV).

Le calcul infinitésimal a l'avantage d'être facile à exposer et simple dans ses procédés ; mais on ne peut se dissimuler qu'il n'a pas la rigueur géométrique qu'on a droit de desirer. L'usage continuel qu'on fait en Dynamique des équations du mouvement, rend presque nécessaire une démonstration plus rigoureuse et qui les mette dans un plus grand degré d'évidence ; c'est ce que nous nous proposons ici.

Soit $e=ft$ l'équation du mouvement d'un point mobile sollicité par des forces quelconques dirigées suivant la même droite : au bout des tems t et $t+\tau$, les distances de ce point à l'origine des e sont ft et $f(t+\tau)$; la différence entre ces deux espaces est l'espace décrit durant le tems τ, qui succède au tems t : cet espace est

$$f(t+\tau)-ft=\tau.f't+\tfrac{1}{2}\tau^2.f''t+\text{etc.}\ldots\ldots\ (1).$$

Considerons maintenant un tems τ compté avant l'expiration du tems t : l'espace parcouru pendant ce second intervalle, egal au premier, est visiblement

$$ft-f(t-\tau)=\tau.f't-\tfrac{1}{2}\tau^2.f''t+\text{etc.}\ldots\ldots\ (2).$$

Or si les forces viennent tout-à-coup à cesser d'agir au bout du tems t, le mouvement devient uniforme, et le mobile, étant supposé avoir la vitesse inconnue v, doit décrire, durant le tems τ qui succède au tems t, l'espace $v\tau$. Supposons que le mouvement varié dont il s'agit étoit accéléré durant les deux tems τ que nous venons de considérer ; il est clair (148) que, quelque courte que soit leur durée, $v\tau$ devra être plus petit que la valeur (1) et plus grand que celle (2). Le contraire auroit lieu si le mouvement étoit retardé. Ainsi $v\tau$ est compris entre ces deux développemens, pourvu qu'on attribue à τ une valeur assez petite pour que le mouvement soit continuellement accéléré ou retardé durant ce tems, ce qui est toujours possible. Il résulte de là que v est toujours compris entre

$$f't + \tfrac{1}{2}\tau . f''t + \text{etc.} \quad \text{et} \quad f't - \tfrac{1}{2}\tau . f''t + \text{etc.}$$

Mais plus τ est petit plus ces deux développemens approchent de la valeur de leur premier terme $f't$, sans toutefois cesser de comprendre entre eux la valeur de v; donc on a

$$v = f't = \frac{de}{dt}\text{; ce qui est conforme à ce qu'on a vu (149).}$$

On pourroit objecter contre notre démonstration les cas où le développement de Taylor est en défaut, et ceux où on veut la vîtesse du mobile à l'instant où elle est un *maximum* ou un *minimum*. Voyez à cet égard un mémoire de M. Ampère, page 160 du 13^{e} journal de l'Ecole Polytechnique.

Faisons pour la force accélératrice un raisonnement analogue. Soit $v = Ft$ la valeur de la vîtesse au bout du tems t, d'un mobile animé d'un mouvement varié quelconque. Si on conçoit, comme ci-dessus, deux tems égaux représentés par τ, dont l'un expire avec le tems t, et dont l'autre succède à ce tems; il est aisé de voir qu'au commencement du premier la vîtesse sera $F(t - \tau)$, et que pendant cet intervalle, elle recevra l'accroissement

$$Ft - F(t - \tau) = \tau . F't - \tfrac{1}{2}\tau^2 . F''t + \text{etc.} \ldots . (1).$$

Pareillement la vîtesse acquise pendant le second tems τ sera

$$F(t + \tau) - Ft = \tau . F't + \tfrac{1}{2}\tau^2 . F''t + \text{etc.} \ldots . (2).$$

Or si la force cesse de varier au bout du tems t, l'accroissement de vîtesse pendant le tems τ qui suit sera $\varphi\tau$,

φ désignant la force accélératrice constante qui aura lieu alors, et dont on cherche la valeur : cela résulte de ce qu'on a dit (151). Or il est clair que φt sera plus grand que la valeur (1) et plus petit que celle (2), si dans le double intervalle que nous venons de considérer, le mouvement est continuellement accéléré ; tandis que s'il est retardé, le contraire aura lieu. Donc $\varphi\tau$ est compris entre ces deux développemens, pourvu qu'on prenne τ suffisamment petit; ainsi la valeur de φ est entre

$$F't - \tfrac{1}{2}\tau . F''t + \text{etc.}, \quad \text{et} \quad F't + \tfrac{1}{2}\tau . F''t + \text{etc.}$$

Or plus τ est petit, plus ces deux développemens approchent de la valeur de leur premier terme $F't$, sans que néanmoins φ cesse d'être compris entre eux : donc $\varphi = F't = \dfrac{dv}{dt}$; résultat qu'il s'agissoit d'obtenir.

III. *Du mouvement Uniformément Varié.*

154. La continuité de l'action d'une puissance sur un mobile nous a conduits à la notion du mouvement varié : mais il peut arriver que cette puissance soit constante, c'est-à-dire que conservant sans cesse la même intensité, elle imprime à chaque instant des degrés égaux de vîtesse : le mouvement qui a lieu dans ce cas a été appelé UNIFORMÉMENT VARIÉ : donc *le mouvement uniformément varié est celui qu'engendre une force continue et constante.*

La définition même du mouvement donne $\varphi =$ constante : désignons cette constante par g; c'est la vîtesse qu'engendrera durant chaque unité de tems la force accélératrice. On a donc $dv = gdt$; intégrons et désignons par V la vîtesse que le mobile avoit au commencement du tems t, nous aurons

$$v = V + gt.$$

Comme gt est la vîtesse acquise au bout du tems t, on voit que *la vîtesse croît proportionnellement au tems.* On a (149, ϵ), $v = \frac{de}{dt}$, donc $de = Vdt + gtdt$, et en intégrant

$$e = E + Vt + \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots\ldots (f).$$

Telle est l'équation générale du mouvement uniformément varié.

Si on fait $t = 0$, on trouve $e = E$: ainsi soient AE Fig. 91. la ligne que décrit le mobile, A l'origine des e, B le lieu du mobile lorsque $t = 0$, on a $AB = E$; c'est l'*espace initial.* V est d'ailleurs la vîtesse initiale, c'est-à-dire celle que le corps avoit en B, soit en vertu d'une impulsion particulière, soit par l'effet de la puissance pendant les instans antérieurs à son arrivée en ce point. Enfin il suit de ce qu'on a vu (151) que g *est la vîtesse acquise au bout de chaque unité de tems.*

Si on prend pour origine des espaces le point de départ du mobile, ou plutôt le lieu où il se trouve lorsqu'on compte $t = 0$, on a $E = 0$: si de plus le mobile n'a aucune vîtesse à cet instant, $V = 0$; et le mouvement uniformément varié a pour ses équations

$$v = gt, \quad e = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Ces formules ne renferment que les circonstances de mouvement dues à la force continue : de sorte qu'on voit que le coefficient g, ou la force accélératrice, est le double de l'espace que cette force fait parcourir au corps durant la première unité de tems.

Au bout du tems t, si tout-à-coup la force cesse d'agir, le mouvement devient uniforme, et l'espace que le mobile décrira, en vertu de la vîtesse acquise, sera gt pendant chaque unité de tems, et (144), $gt \times t = gt^2$ durant un tems t égal au premier. Or cet espace est double de $\frac{1}{2}gt^2$, que le mobile a décrit pendant le premier tems t: donc *l'espace décrit d'un mouvement uniformément varié, durant un certain tems, est la moitié de celui qui seroit parcouru dans le même tems, d'un mouvement uniforme, dont la vîtesse seroit égale à celle qu'a communiquée la force continue* : g est positif ou négatif suivant que la force est accélératrice ou retardatrice (152). De même V est négatif ou positif, suivant que l'impulsion est dirigée vers l'origine des espaces ou en sens contraire : enfin E seroit négatif si le point de départ du mobile étoit situé en B' de l'autre côté de l'origine A. En un mot, A et V sont comme dans le mouvement uniforme (144); on voit que de même que les forces s'ajoutent, les valeurs des espaces $\frac{1}{2}gt^2$ et $E + Vt$ qu'elles produisent, s'ajoutent également.

155. Voici quelques conséquences de ce qui précède.

1°. Les équations (g) donnent la vîtesse, et l'espace parcouru en fonction du tems; en éliminant t entre elles, on obtient les équations

$$v^2 = 2ge, \text{ ou } e = \frac{v^2}{2g}$$

qui font connoître la vîtesse en fonction de l'espace, et réciproquement. On auroit obtenu directement ces équations en intégrant la formule (e) qui devient ici $gde = vdv$.

2°. Si on avoit à comparer entre eux les mouvemens de plusieurs mobiles, il faudroit combiner ensemble des équations de la forme $e = E + Vt + \frac{1}{2}gt^2$, ainsi qu'on l'a fait précédemment (147) : mais ici les calculs seroient beaucoup plus compliqués. Nous nous bornerons à traiter le cas où deux mobiles identiques sont soumis aux actions d'une même force, et où on fait abstraction des circonstances étrangères à cette force. Alors on a les équations suivantes, pour

le 1er. mobile..... $e = \frac{1}{2} gt^2$, $v = gt$, $v^2 = 2ge$,
le 2e. mobile..... $e' = \frac{1}{2} gt'^2$, $v' = gt'$, $v'^2 = 2ge'$.

1°. *Les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des tems*, puisqu'on a $\frac{e}{e'} = \frac{t^2}{t'^2}$.

2°. *Les vîtesses sont comme les tems*, car on a $\frac{v}{v'} = \frac{t}{t'}$.

3°. Enfin *les espaces sont comme les carrés des vîtesses*, puisqu'on a $\frac{e}{e'} = \frac{v^2}{v'^2}$.

156. Le mouvement des corps pesans est celui qui, par sa nature et ses nombreuses applications, mérite le plus notre attention. La pesanteur, cette force dont l'action s'exerce continuellement sur tous les corps, leur communique sans cesse de nouveaux degrés de vîtesse. Nous supposerons ici que cette force est constante, et que, par conséquent, le mouvement qu'elle imprime est uniformément varié. Cette hypothèse est tout-à-fait légitime, car nous verrons bientôt (161) que la force d'attraction qui porte tous les corps vers le centre de la terre, a une intensité qui décroît comme les carrés de leurs distances à ce centre augmentent : mais comme les espaces les plus grands que parcourent, en vertu de la gravité, les corps qui sont à la surface de notre globe, sont fort petits par rapport à son rayon, à cause du peu d'étendue de la hauteur dont les corps peuvent descendre en vertu de gravité, il est facile de voir que le mouvement varié qu'elle leur imprime est très-peu différent du

mouvement uniformément varié que nous lui substituons. En effet, soient r et $r+\alpha$ les distances de deux corps au centre de la terre, les attractions qu'ils éprouvent sont $g=\frac{m}{r^2}$ et $g'=\frac{m}{(r+\alpha)^2}$; or comme α est une très-petite quantité, on peut, dans le développement de $(r+\alpha)^{-2}$, négliger α^2, α^3.... et on a

$$g'=m(r^{-2}-2\alpha r^{-3})=\frac{m}{r^2}-\frac{2\alpha m}{r^3}=g-\frac{2\alpha m}{r^3}.$$

Ainsi la gravité a décru de $\frac{2\alpha m}{r^3}$, quantité absolument inappréciable.

En général il est visible que lorsque les forces variables n'agissent que pendant un tems de fort courte durée, on peut les regarder comme constantes.

Les équations $v=gt$, $e=\frac{1}{2}gt^2$, $v^2=2ge$ expriment donc toutes les circonstances du mouvement d'un corps qui tombe librement dans le vide : le coefficient g y désigne la force accélératrice de la pesanteur. En faisant $t=1$, on trouve $v=g$ et $e=\frac{1}{2}g$: d'où il suit que g n'est autre chose que la quantité dont s'accroît, pendant chaque unité de tems, la vitesse d'un corps abandonné à la gravité seule (ce qu'on a déja vu 154); ou, si on veut, le double de l'espace qu'il parcourt pendant la première unité de tems. Il est donc facile d'obtenir la valeur de g, en laissant tomber un corps dans le vide : il est vrai que cette expérience ne peut être faite avec toute l'exactitude convenable; mais nous verrons bientôt (19[illegible], [illegible] et 255) d'autres procédés plus rigoureux, qui ont fait connoître qu'en prenant pour unité la cent millième partie du jour, on a $g=7{,}522$ mètres; et qu'en prenant la seconde sexagésimale pour unité, on a

$$g = 9{,}809 \text{ mètres}, \text{ ou } g = 30{,}2 \text{ pieds} \ldots\ldots (g).$$

En attribuant à g cette valeur, on a donc pour les équations du mouvement d'un corps qui tombe dans le vide

$$\left.\begin{array}{l} e = \frac{1}{2} gt^2, \quad v = gt \\ e = \dfrac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{(2ge)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (h).$$

Les deux dernières sont d'un fréquent usage; elles sont destinées à faire connoître la hauteur e dont un corps grave a dû tomber dans le vide pour avoir acquis la vîtesse v, et réciproquement : v est ce qu'on nomme la vîtesse due à la hauteur e.

157. On peut obtenir, au moyen des équations (h), la solution de tous les problêmes relatifs à la chûte des corps pesans. Nous en mettrons ici plusieurs; et comme l'usage de la seconde sexagésimale est plus familier, nous la préférerons, et nous emploierons les équations (g).

I. Combien de tems un corps mettra-t-il à tomber de 400 mètres? L'équation $e = \frac{1}{2} gt^2$, en faisant $e = 400$, donne

$$t^2 = \frac{400}{4{,}904}, \text{ d'où } t = \sqrt{\left(\frac{400}{4{,}904}\right)} = 9{,}03.$$

Ainsi ce corps emploiera un peu plus de 9 secondes.

II. Quelle sera la vîtesse de ce corps à la fin de sa chûte? $v = gt$ devient ici $v = 9{,}809 \times 9{,}03 = 88{,}57$. Autrement on a $v = \sqrt{(2ge)} = \sqrt{(19{,}618 \times 400)} = 88{,}57$. Ainsi il parcourroit uniformément $88^m{,}57$ par seconde.

III. Un corps pesant ne peut parvenir au fond d'un précipice qu'au bout de $7''$, quelle en est la profondeur? L'équation $e = \frac{1}{2} gt^2$ donne pour cette profondeur $e = 4{,}904 \times 49 = 240^m{,}3$.

IV. De quelle hauteur faut-il qu'un corps pesant tombe pour acquérir une vîtesse de 400^m par seconde ? L'équation $e = \frac{v^2}{2g}$ donne $e = \frac{(400)^2}{19,618} = 8156^m$.

V. Jusqu'ici nous n'avons considéré que la chûte libre d'un corps pesant ; mais si on lui eût imprimé une vîtesse initiale V, dans ce cas il auroit fallu recourir aux équations (f) ; ainsi, en prenant pour origine le point de départ, comptant les e positifs dans le sens de l'impulsion, on auroit, suivant que cette impulsion seroit dirigée de haut en bas ou de bas en haut

$$v = V + gt, \qquad e = Vt + \tfrac{1}{2}gt^2,$$
$$v = V - gt, \qquad e = Vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Arrêtons-nous au second cas. Les valeurs de v et e sont formées de deux termes, l'un positif, l'autre négatif ; dans le commencement le corps montera, quelque petite que soit l'impulsion ; mais bientôt gt surpassera V, v deviendra négatif et le corps redescendra. Pour trouver le lieu et l'instant où cela arrive, il est clair que e étant un *maximum*, il faut faire $\frac{de}{dt} = 0$, ou $v = 0$. Ainsi tant qu'on a $t < \frac{V}{g}$ le corps monte ; lorsque $t = \frac{V}{g}$, on a $e = \frac{V^2}{2g}$, et le corps a atteint son *maximum* d'élévation : enfin t devient $> \frac{V}{g}$, et le corps redescend ; la vîtesse v alors s'accélère en partant de $v = 0$. Si on fait $t = \frac{2V}{g}$, on trouve $v = -V$ et $e = 0$, ce qui prouve que le mobile emploie pour redescendre au point de départ le même tems qu'il a mis à s'élever, et qu'il a en sens contraire la vîtesse de projection.

On peut donc trouver à quelle élévation est parvenu un corps jeté verticalement, quand on connoît le tems écoulé depuis l'origine de son mouvement jusqu'à l'instant de sa chûte. Par exemple, un corps qui lancé verticalement n'est retombé qu'au bout de 18″, a mis nécessairement 9″ à s'élever : on a donc pour la hauteur cherchée

$$e = \frac{1}{2} gt^2 = 4,904 \times 81 = 397,224 \text{ mètres.}$$

Nous réserverons dorénavant la lettre g pour désigner la force de la pesanteur, c'est-à-dire $9^m,81$.

IV. *Applications des formules du Mouvement Varié.*

Nous allons appliquer à quelques exemples les formules (c), (d) et (e) du mouvement varié, pour mieux développer les principes dont nous avons donné l'exposition (153).

158. Supposons qu'un point matériel placé en A soit sollicité par deux forces ; l'une tendant à l'animer de A vers B d'un mouvement uniformément varié : l'autre tendant au contraire à le repousser de A vers D, et agissant en raison inverse de la distance du mobile au point B : cherchons les diverses circonstances du mouvement. Fig. 93.

Soit $AB = a$, $AN = e =$ l'espace parcouru au bout du tems t : si on désigne par χ la force accélératrice qui provient de la répulsion du mobile de N vers D, et par m la valeur de cette force à l'unité de distance du point B, on aura, par la nature de la question $\frac{NB}{1}$ ou $\frac{a+e}{1} = \frac{m}{\chi}$; donc $\chi = \frac{m}{a+e}$. Soit enfin g la force accélératrice constante qui agit sur le mobile de N vers B. La force φ qui anime en effet le corps au bout du tems t, est la différence entre ces deux forces, d'où $\varphi = \chi - g$; donc on a les trois équations

$$\varphi = \frac{m}{a+e} - g, \quad \varphi de = v dv, \quad de = v dt,$$

entre lesquelles il s'agit d'éliminer deux des quatre variables e, t, v et φ. La seconde et la première donnent $v dv = \left(\frac{m}{a+e} - g\right) de$, d'où $\frac{1}{2} v^2 = m \log(a+e) - ge + C$. Pour déterminer C, observons qu'au point A....... on a $v = 0$, $e = 0$; on en conclut $C = -m \log a$. Donc

$$v = \pm \sqrt{\left\{ 2m \times \log\left(\frac{a+e}{a}\right) - 2ge \right\}} \ldots\ldots\ldots (i);$$

équation qui détermine la vîtesse que le mobile a acquise, après avoir parcouru l'espace e. Pour obtenir une relation entre e et t, il faudroit mettre ici pour v sa valeur $\frac{de}{dt}$, et intégrer de nouveau.

159. Le problême que nous venons de résoudre se présente dans une circonstance remarquable. Si un corps pesant, tel qu'un piston, ferme un cylindre ou tube indéfini Fig. 92. BD, ouvert seulement à l'extrémité D, et si la partie AB contient un fluide élastique comprimé, il est clair, qu'en faisant abstraction du frottement du piston contre les parois du tube, ce piston sera soumis à l'action de la pesanteur et de la pression de l'air extérieur qui tendront à le faire descendre avec une force constante g, et à la force répulsive du fluide élastique : or on sait que le ressort du fluide est d'autant moindre, que l'espace qui le contient est plus grand, ou que le piston est plus éloigné de B; ainsi la force provenant de la vapeur expansive agit en

raison inverse de la distance du piston mobile au point B. Pour obtenir le maximum de vîtesse, il faut égaler à zéro la valeur de $\frac{dv}{dt}$, et déduire ensuite celle de $a+e$: or cela revient à supposer que la force $\varphi = 0$, et on a $a+e=\frac{m}{g}$. Passé ce point, v diminue, le mouvement devient retardé et même il est nul lorsque....... $m \log\left(\frac{a+e}{a}\right) = ge$; ensuite le mobile revient sur ses pas et oscille indéfiniment.

On trouve un exemple bien simple de cette espèce de mouvement dans les armes à feu : on sait que l'inflammation de la poudre développe une grande quantité de vapeur expansive, qui, contrainte dans un espace étroit, chasse avec force le projectile. Si on suppose que $e=AD=$ la distance de l'orifice du canon, au point de départ de la balle, $a+e$ est la longueur totale BD de ce canon, et v désigne alors la vîtesse du boulet au sortir du canon. La longueur qu'il convient de donner au canon pour que cette vîtesse soit la plus grande possible, est $\frac{m}{g}$.

On peut faire abstraction de la résistance de l'air et du poids du boulet, qui altèrent peu la vîtesse jusqu'à l'orifice D du canon : ce poids est d'ailleurs nul lorsque l'axe du tube est horisontal. Si on fait $g=0$, ou, ce qui revient au même, si on ne suppose dès l'origine du calcul d'autre force que $\chi=\frac{m}{a+e}$, on a

$$v=\sqrt{\left\{2m.\log\left(\frac{a+e}{a}\right)\right\}} \quad \ldots\ldots (k).$$

160. Soit en D un point matériel sollicité par une force Fig. 98.

accélératrice, agissant de D vers B en raison inverse du carré de la distance de ce mobile au point B : cherchons les circonstances du mouvement.

Soit $BD = a$, $DN = e =$ l'espace parcouru au bout du tems t : lorsque le mobile sera parvenu en N, la distance BN sera $a - e$; désignons par m la valeur de la force attractive φ lorsque le mobile est à l'unité de distance du point B; les conditions de la question exigent que $\frac{\varphi}{1^2} = \frac{m}{\overline{BN}^2} = \frac{m}{(a-e)^2}$: on a donc ici

$$\varphi = \frac{m}{(a-e)^2}, \quad \varphi de = vdv, \quad vdt = de.$$

On élimine la quantité φ entre les deux premières, et on a $vdv = \frac{mde}{(a-e)^2}$, d'où on tire $v^2 = \frac{2m}{a-e} + C$. Supposons qu'à l'origine D, le mobile n'étoit animé d'aucune vîtesse, c'est-à-dire n'avoit reçu aucune impulsion; on avoit donc en même tems $e = 0$ et $v = 0$, ainsi $C = -\frac{2m}{a}$; en substituant et réduisant on obtient

$$v = \sqrt{\left(\frac{2m}{a}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{e}{a-e}\right)} \ldots\ldots (l).$$

Pour obtenir la relation entre e et t, il suffit de mettre pour v sa valeur $\frac{de}{dt}$, et d'intégrer................

$dt = \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \sqrt{\left(\frac{a-e}{e}\right)} de$: or pour faciliter l'intégration, il importe de laisser le radical au dénominateur seul; nous multiplierons donc la fraction $\frac{a-e}{e}$ haut et bas par $a - e$, et le radical sera $\frac{a-e}{\sqrt{(ae-e^2)}}$: donc on a

$$dt = \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \times \frac{a-e}{\sqrt{(ae-e^2)}} \cdot de.$$

On chasse ae du radical, en faisant $e = \frac{1}{2}a - z$, ce qui donne à intégrer la fraction $\frac{-\frac{1}{2}a - z}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}} dz$, qui se partage en $\int \frac{-zdz}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}} = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}$, et $\int \frac{-\frac{1}{2}adz}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}} = \frac{1}{2}a \cdot \text{arc}\left(\cos = \frac{2z}{a}\right)$; la constante est nulle parce qu'on a à-la-fois $e = 0$, $t = 0$, $z = \frac{1}{2}a$; remettant pour z sa valeur $\frac{1}{2}a - e$, on en conclut

$$t = \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \left\{ \sqrt{(ae-e^2)} + \frac{1}{2}a \times \text{arc}\left(\cos = \frac{a-2e}{a}\right) \right\}.$$

Newton a donné une construction très-élégante de cette formule. Soit décrit sur $DB = a$ comme diamètre un demi-cercle DMB; l'abscisse DN étant $= e$, l'ordonnée NM est comme on sait $= \sqrt{(ae-e^2)}$; de plus, DM est l'arc dont le sinus verse est e, dans le cercle DMB dont le rayon est $\frac{1}{2}a$; donc, $NM + MD$ représente le second facteur de la valeur de t, et on a Fig. 93.

$$t = \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \times [NM + MD].$$

Les valeurs ci-dessus de v et de t donnent la solution complette du problème proposé, et renferment toutes les circonstances particulières du mouvement. Si on fait $e = a$, on obtient

$$v = \infty, \text{ et } t = \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \times \frac{a\pi}{2}.$$

La vitesse du point mobile au centre B d'attraction est donc infinie; ce qui est aisé à concevoir, puisque l'intensité de la puissance croît d'autant plus que le mobile est plus voisin du centre. La seconde expression donne le tems nécessaire pour arriver à ce centre; elle est proportionnelle à $a\sqrt{a}$, ou $\sqrt{a^3}$: ainsi *les tems employés par deux corps partant du repos, pour arriver au centre d'attraction, sont entre eux comme les racines carrées des cubes de leurs distances initiales à ce centre.*

161. On a nommé *Force Centripète* cette force d'attraction vers un centre fixe; les observations les plus constantes établissent que l'attraction est une des propriétés dont jouit la matière (voyez n°. 187); on a même reconnu que pour deux points matériels de masses égales, cette attraction a lieu en raison inverse du carré de leurs distances. Le problème que nous venons de résoudre s'applique aux corps qui pèsent sur notre globe, car nous avons vu (156) qu'on peut regarder la pesanteur terrestre comme un cas particulier de l'attraction universelle; il ne faut pour cela que donner à la constante m la valeur convenable: or soit r le rayon terrestre, g la pesanteur à la surface; puisque m et g sont les valeurs de la force d'attraction aux distances 1 et r, du centre de la terre, on a $\dfrac{m}{r^2}=\dfrac{g}{1^2}$, mettant donc r^2g pour m, notre formule devient

$$rt\sqrt{\left(\frac{2g}{a}\right)}=\sqrt{(ae-e^2)}+\tfrac{1}{2}a.\text{arc}\left(\cos=\frac{a-2e}{a}\right),$$

et si e est très-petit par rapport à a, $t=\dfrac{a}{r}\sqrt{\left(\dfrac{e}{2g}\right)}$.

162. Lorsqu'un corps se meut dans un fluide, il est obligé d'employer une partie de la force dont la puissance motrice l'a animé, pour déplacer les molécules fluides, se

faire entre elles un passage, et se mouvoir : c'est ce qui sera rendu manifeste après que nous aurons traité du choc des corps (219, 1°.). Cet effort employé par un corps qui se meut dans un fluide, est visiblement dirigé dans le sens même de son mouvement; il dépend de la vîtesse qui l'anime. La résistance du fluide peut donc être assimilée à une force directement opposée au mouvement du corps, et variable avec sa vîtesse suivant une certaine loi : de sorte qu'on peut considérer un corps mu dans un fluide, comme mis en mouvement dans le vide, pourvu qu'outre le système de forces qui agissent sur lui, on en conçoive une de plus qui exerce son action en sens contraire du mouvement, et dont l'intensité soit dépendante de la vîtesse du mobile. Quant à la loi que suit cette dépendance, on a coutume de prendre *la force retardatrice de la résistance du fluide, proportionnelle au carré de la vîtesse.* Voyez à cet égard ce qui sera dit (222).

Cela posé, analysons le mouvement d'un corps pesant lancé verticalement de bas en haut dans l'atmosphère avec une vîtesse V : d'après ce qui vient d'être dit, ce corps pourra être considéré comme animé par deux forces, savoir : 1°. la pesanteur g, qui tendra à le faire descendre et qui sera dirigée en sens opposé de la vîtesse imprimée V; 2°. la force retardatrice du fluide, dont la valeur au bout du tems t sera représentée par mv^2, v étant la vîtesse du corps à cet instant, et m un coefficient constant qui dépend de la nature du fluide et de la forme du corps; c'est la valeur de cette force lorsque le corps a une vîtesse égale à l'unité. Cette puissance étant dirigée dans le même sens que la gravité, on n'a qu'une force $= -(g + mv^2)$, à cause qu'elle agit en sens contraire de l'impulsion primitive : cette impulsion entrera d'ailleurs bientôt en considération; elle ne fait pas partie des forces qui agissent au bout du tems t. Ainsi on a les trois équations

$$\varphi = -(g + mv^2), \quad \varphi dt = dv, \quad \text{et} \quad \varphi de = vdv.$$

En mettant pour φ sa valeur dans les deux dernières, on a

$$dt = -\frac{dv}{g + mv^2}, \quad de = \frac{-vdv}{g + mv^2}.$$

Il est facile d'intégrer ces deux équations ; et on obtient

$$\sqrt{(mg)} \cdot t = C - \text{arc}\left\{\text{tang} = \left(v \cdot \sqrt{\frac{m}{g}}\right)\right\}$$
$$2me = C' - \log(g + mv^2).$$

Les constantes C et C' se déterminent en observant que la question exige qu'on ait en même tems $t = 0$, $e = 0$, $v = V$; nous ferons, pour abréger, la constante $m = a^2 g$: nous aurons donc $C = \text{arc}(\text{tang} = aV)$ et......... $C' = \log\{g(1 + a^2 V^2)\}$; ce qui transforme les valeurs ci-dessus en

$$agt = \text{arc}(\text{tang} = aV) - \text{arc}(\text{tang} = av)$$
$$2ga^2 e = \log\left(\frac{1 + a^2 V^2}{1 + a^2 v^2}\right).$$

Ces deux valeurs servent à faire connoître l'espace parcouru par le mobile, et sa vîtesse au bout du tems t : elles doivent remplacer celles que nous avons trouvées (156 et 157) puisque nous y avons fait abstraction de la résistance du fluide. Si on fait $v = 0$, on a pour la plus grande élévation E, à laquelle le mobile puisse parvenir en vertu de sa force de projection ; et pour le tems T qu'il y emploie

$$2a^2 gE = \log(1 + a^2 V^2), \quad agT = \text{arc}(\text{tang} = aV).$$

Parvenu à son maximum d'élévation, le mobile a épuisé sa vitesse de projection ; il redescend donc : mais ici la force retardatrice de la résistance du fluide agit tout-à-coup en sens opposé, et les équations auxquelles nous venons de parvenir n'ont plus lieu : ainsi le mouvement n'est plus assujetti à la loi de continuité.

Pour analyser ce cas, proposons-nous de chercher le mouvement d'un corps pesant lancé verticalement de haut en bas. La force accélératrice est alors $g - mv^2$, et on a

$$\varphi = g - mv^2, \ \varphi dt = dv, \ \varphi de = vdv;$$

d'où on conclut $dt = \frac{dv}{g - mv^2}$, et $de = \frac{vdv}{g - mv^2}$, faisant, comme ci-dessus, $m = a^2 g$, puis supposant pour intégrer la première $av = u$, on a $agdt = \frac{du}{1 - u^2}$, ce qui donne $2\,agt = C + \log \frac{1+u}{1-u}$: on trouve donc

$$2\,agt = C + \log\left(\frac{1 + av}{1 - av}\right)$$

$$2\,a^2 ge = C' - \log\{g(1 - a^2 v^2)\}.$$

Comme $t = 0$, donne $e = 0$ et $v = V$; on trouve

$$C = -\log\left(\frac{1 + aV}{1 - aV}\right) \text{ et } C' = \log\{g(1 - a^2 V^2)\}.$$

Donc enfin on a pour les équations du mouvement

$$2\,agt = \log\left\{\frac{(1 + av)\ (1 - aV)}{(1 - av)\ (1 + aV)}\right\}$$

$$2\,a^2 ge = \log\left(\frac{1 - a^2 V^2}{1 - a^2 v^2}\right) = \log\left\{\frac{(1 + aV)\ (1 - aV)}{(1 + av\ )\ (1 - av\ )}\right\}$$

Dans le cas où le mobile auroit été abandonné à l'action de la gravité, sans avoir reçu d'impulsion, il suffiroit de faire dans ces formules $V=0$; ce qui donne

$$2agt=\log\left(\frac{1+av}{1-av}\right),\ 2a^2ge=-\log\{(1-av)(1+av)\}.$$

Consultez la fin du n°. 222.

Dans le problême précédent la vîtesse du mobile, lorsqu'il est revenu au point de départ, n'est plus V comme (157, V); pour l'obtenir, il faut mettre ici E pour e; on trouve....

$$v=\frac{V}{\sqrt{(1+a^2V^2)}}.$$

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT D'UN POINT EN LIGNE COURBE.

I. *Propositions générales.*

163. VOICI comment la notion du mouvement curviligne peut être déduite des premiers élémens de la Mécanique.
Fig. 94. Soit AB la direction d'une force qui donne une impulsion au point mobile A : il parcourra uniformément cette ligne, si aucune cause n'altère son mouvement. Mais supposons que parvenu en B, ce point soit soumis à l'action d'une autre force qui lui communique dans le sens BD une impulsion; en formant le parallélogramme $BCED$, sur les parties BC, BD, proportionnelles aux vîtesses imprimées, on sait que le corps décrira la diagonale BE. Si de même le mobile reçoit une impulsion suivant GE, il parcourra EF et ainsi de suite. On voit donc qu'il décrira le polygone $ABEF$: mais si on suppose que les intervalles de tems, qui séparent ces diverses impulsions,

sont plus courts, le polygone aura de plus petits côtés; de sorte qu'il est facile de voir que le mobile décrira en effet une courbe, si les forces agissent sans interruption.

164. Il suit de là que le point mobile qui décrit un polygone $ABEF$ doit continuer à décrire uniformément le dernier côté EF, si aucune force ne vient agir de nouveau; et que par conséquent *lorsqu'un mobile décrit une courbe, si à un instant quelconque l'action des puissances cesse tout-à-coup, le mobile doit parcourir uniformément la tangente à cette courbe, au point où les forces ont cessé d'agir sur lui.* En effet, on peut regarder chaque élément de cette courbe comme le côté infiniment petit d'un polygone. Ainsi le corps change à chaque instant la direction de son mouvement, qui est celle de la tangente.

Lorsqu'un corps décrit une courbe en vertu de l'action de certaines forces, pour se faire une idée de ce que désigne le mot *vîtesse*, il faut supposer que la courbe est rectifiée, et que tout-à-coup les forces cessent d'agir; l'espace décrit par le mobile durant l'unité de tems est sa vîtesse à l'instant où ce changement s'est produit. Soit donc KMZ la courbe que parcourt un point matériel : Fig. 100.
si au bout du tems t le corps est parvenu en M, en nommant s l'arc KM décrit, si tout-à-coup les forces cessent d'agir, le corps devra décrire uniformément la tangente MH, avec une vîtesse $v = \frac{ds}{dt}$.

165. Quelles que soient les forces qui agissent sur un mobile, on peut toujours les décomposer en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires; il est clair que chaque composante aura un effet indépendant des deux autres (146, 5°.), et que par conséquent on peut appliquer à chacune ce qui a été dit des mouvemens rectilignes. C'est

par ce moyen qu'on parvient à connoître les propriétés du mouvement d'un point, et la nature de la ligne qu'il parcourt (qu'on nomme *Trajectoire*), lorsque les forces qui agissent sur lui sont données en grandeur et en direction. Le mouvement curviligne se réduit par là naturellement à deux ou trois mouvemens rectilignes, selon que la courbe décrite est à simple ou à double courbure. En effet, en rapportant cette courbe à des coordonnées rectangulaires, il est clair que la détermination du point de la trajectoire où ce mobile se trouvera à chaque instant, dépendra de la valeur de ses coordonnées au même instant : de sorte que chacune de ces coordonnées sera une fonction de tems, et pourra représenter l'espace rectiligne parcouru par un mobile qui seroit la projection du vrai mobile sur chacun des axes coordonnés.

Ainsi, lorsque la trajectoire est plane, le mouvement pourra être représenté par les deux équations $x = Ft$, $y = ft$, qui seront celles des mouvemens rectilignes de deux mobiles suivant les axes des x et des y. En éliminant t entre ces équations, on obtiendra, en x et en y, une relation qui sera l'équation de la ligne parcourue par le mobile, puisqu'elle exprimera une condition indépendante du tems t, entre les variables x et y. De même si la trajectoire est à double courbure, le mouvement sera représenté par trois équations $x = Ft$, $y = ft$, $z = \chi t$; en éliminant t, on obtient deux équations en x, y et z, qui sont celles de la courbe à double courbure que décrit le corps.

Tout ceci s'éclaircira par la suite. Il ne s'agit que de déduire les équations $x = Ft$, $y = ft$, $z = \chi t$ de la nature des puissances, ou plutôt trois équations entre les quatre variables x, y, z et t; c'est ce qui va être développé.

166. Soient, au bout du tems t, P', P''.... les forces continues qui agissent sur le mobile, α', α''...; β', β''...

γ', γ''.... les angles formés par leurs directions avec les axes respectifs des x, y et z. Décomposons chaque force en trois autres parallèles à ces axes; ce qui donne, d'après ce qu'on a vu (24), trois forces X, Y et Z, qui agissent ensemble sur le corps, et lui impriment une impulsion élémentaire, chacune dans sa direction. On a

$$\left.\begin{array}{l} X = P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \text{etc.} \\ Y = P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \text{etc.} \\ Z = P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (a').$$

Il est inutile de dire que chacune de ces composantes doit être prise avec le signe qui lui appartient, et qui se détermine d'après les considérations développées (26).

Au bout du tems t, le mobile, placé sur sa trajectoire au point qui a x, y et z pour coordonnées, a donc dans le sens des x la vîtesse $\frac{dx}{dt}$; de sorte qu'en ce point on peut concevoir ce mobile comme en repos, et recevant dans le sens des x une impulsion qui lui imprime la vîtesse $\frac{dx}{dt}$. Cette vîtesse doit s'accroître par l'effet des forces continues P', P''.... de $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, durant le tems dt, ainsi elle devient $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Or la vîtesse qui est imprimée au corps dans le sens des x (d, 152), est en effet $\frac{dx}{dt} + Xdt$; et comme les effets des forces de directions rectangulaires sont indépendans (145), les puissances Y et Z ne changent rien à cette vîtesse. On en conclut que les vîtesses Xdt et $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ sont égales.

On prouveroit la même chose par rapport aux axes des y et des z, ainsi on a

$$\left.\begin{aligned} Xdt &= d\left(\frac{dx}{dt}\right) \\ Ydt &= d\left(\frac{dy}{dt}\right) \\ Zdt &= d\left(\frac{dz}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (b').$$

ou bien, en prenant dt constant,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X,\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y,\ \frac{d^2z}{dt^2} = Z \ldots\ldots\ldots (c').$$

Telles sont *les équations générales du mouvement libre d'un point.* Elles doivent être employées à-la-fois lorsque les forces P', P''... sont dans des plans différens : mais deux d'entre elles suffisent dans le cas contraire : elles remplacent d'ailleurs les équations $x = Ft$, $y = ft$, $z = \chi t$, dont nous avons parlé dans le numéro précédent, qui appartiennent aux mouvemens des trois mobiles suivant les axes, de manière à être la projection du vrai mobile à chaque instant.

167. Les équations (b') ou (c') servent à faire connoître toutes les circonstances du mouvement d'un point matériel libre, et soumis à l'action des forces continues, données à chaque instant, en grandeur et en direction, c'est-à-dire servent à assigner la vîtesse du mobile et son lieu à un instant déterminé, ainsi que sa trajectoire. En effet, supposons pour plus de simplicité que les forces soient dans le plan des xy ; X et Y étant constans ou variables, mais donnés, il ne s'agit que d'éliminer le tems entre les deux équations $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, $\frac{d^2y}{dt^2} = Y$. Si on conçoit

ce calcul effectué, ainsi que les intégrations, on aura une équation entre x et y, qui sera celle de la trajectoire. On pourra même obtenir de semblables relations entre x et t, et y et t. Les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ donneront les vîtesses du mobile dans le sens des x et des y: on en concluera sa vîtesse réelle, qui est

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}.$$

Enfin les équations entre x et t, y et t, donneront la position du mobile pour chaque valeur connue du tems t.

Nous aurons, par la suite, plusieurs occasions d'appliquer les équations (b', c'); nous ferons seulement observer que chaque intégration introduit une constante: on aura donc quatre constantes arbitraires, dont deux seront déterminées par la valeur de la vîtesse qui avoit lieu à un instant donné, tel qu'au commencement du tems t: les deux autres dépendront des coordonnées du mobile à un instant quelconque qui pourra être le même que le précédent. Ces principes deviendront plus lucides à l'aide des diverses applications que nous en ferons: nous ne les énonçons ici que pour faire sentir toute l'importance des équations (b', c'), et pour faire voir en même tems que, quoiqu'elles ne dépendent que des forces accélératrices, elles renferment néanmoins implicitement la vîtesse et le lieu du mobile au commencement du mouvement.

168. On peut employer le calcul précédent pour assigner la vîtesse du mobile à un instant déterminé; mais il n'est guère praticable que lorsque X, Y et Z ne sont pas fonctions de x, y et z. Ainsi il est plus élégant d'employer la formule suivante. Multiplions la première des équations (c') par dx, la seconde par dy, la troisième

par dz, et ajoutons : il vient

$$\frac{dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z}{dt^2} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Or le numérateur du premier membre est la différentielle de $\frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2)$ ou de $\frac{1}{2}.ds^2$: donc en intégrant on a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = A + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)\ldots\ldots (d').$$

Pour que cette équation puisse être appliquée à des circonstances de mouvement, il faut que $Xdx + Ydy + Zdz$ soit une différentielle exacte. Si donc on considère X, Y et Z comme des fonctions de x, y et z, indépendantes de t, elles devront satisfaire aux conditions suivantes

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx},\ \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx},\ \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}\ldots (e'),$$

et on pourra regarder $Xdx + Ydy + Zdz$, comme la différentielle d'une fonction χ de x, y et z facile à trouver; c'est-à-dire, qu'on a $Xdx + Ydy + Zdz = d\chi$;

$$v^2 = A + 2\chi\ldots\ldots\ldots\ldots (d').$$

La valeur de la constante A dépend de la vîtesse initiale du mobile, ou, en général, de sa vîtesse à un instant quelconque : ce résultat nommé *principe des forces vives* (218) est sur-tout remarquable en ce qu'il fait voir que la vîtesse est indépendante de la trajectoire. Voyez le n°. 204.

Il est inutile d'insister pour faire voir que lorsque la trajectoire située et dans le plan des xy, cette dernière équation a lieu ; mais qu'alors $d\chi = Xdx + Ydy$ et que (e') se réduit à $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$; X et Y sont d'ailleurs supposées des fonctions de x et y, indépendantes du tems t.

169. Si le mobile n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, c'est-à-dire s'il ne se meut qu'en vertu d'une impulsion, on a $X=0$, $Y=0$, $Z=0$: donc $v^2=A$; ainsi la vîtesse est constante. Les équations (c') donnent $\frac{dx}{dt}=c$, $\frac{dy}{dt}=c'$, $\frac{dz}{dt}=c''$; d'où on tire $\frac{dx}{dy}=\frac{c}{c'}$; $\frac{dx}{dz}=\frac{c}{c''}$; les équations des projections de la trajectoire sont donc $c'x=A+cy$, $c''x=B+cz$; ce qui fait voir que le mobile a un mouvement rectiligne et uniforme, proposition d'ailleurs évidente (4).

170. Les équations (c') conduisent à une conséquence remarquable. Pour la rendre plus facile à saisir, nous supposerons d'abord que la trajectoire est dans le plan xy : on ne doit alors employer que les deux premières valeurs (c'). Multiplions-les respectivement par y et x, puis soustrayons; il vient $\frac{y.d^2x-x.d^2y}{dt^2}=Xy-Yx$; intégrant, on a

$$\frac{ydx-xdy}{dt}=C+\int(Xy-Yx)\,dt.$$

Or $Xy-Yx$ n'est nul que dans deux cas : 1°. lorsqu'on a $X=0$ et $Y=0$, c'est-à-dire lorsque le mobile n'est mu que par une impulsion; 2°. lorsque $\frac{Y}{X}=\frac{y}{x}$; or $\frac{Y}{X}$ est (18, V) la tangente de l'angle que forme avec l'axe des x la résultante des forces Y et X, ou la puissance qui anime le corps au bout du tems t; $\frac{y}{x}$ est la tangente de l'angle que forme avec l'axe des x, la ligne menée de l'origine (*le rayon vecteur*) au mobile à cet instant: puisque ces angles sont égaux, il s'ensuit que cette puissance est dirigée vers l'origine: ce dernier cas est celui du système du monde, ainsi que nous le ferons voir bientôt (187). Dans ces deux cas on a donc

$$C = \frac{ydx - xdy}{dt}, \text{ ou } Ct + C' = \int (ydx - xdy) \ldots (f').$$

Fig. 95. Cela posé, on sait par les principes du calcul intégral que l'aire $ADMP$ d'une courbe est $=\int(ydx)$: concevons qu'on ait mené de l'origine A, à deux points de cette courbe, des *rayons vecteurs* AH et AM, on aura pour l'aire AHM qu'ils comprennent, $\xi = ADMP - AMP \pm ADH$, ou $\xi = \int(ydx) - \frac{1}{2}xy \pm ADH$; le $\pm$ dépend de la position de AH relativement à l'axe des y. En différentiant, on obtient $d\xi = ydx - \frac{1}{2}d(xy)$, ou $d\xi = \frac{1}{2}(ydx - xdy)$. Mettons cette valeur dans l'équation (f'), elle devient $Ct + C' = 2\xi$, ou plutôt $\frac{1}{2}.Ct = \xi$; car on peut toujours supposer $C' = 0$, puisqu'il ne faut pour cela que prendre convenablement l'origine du tems t. Donc *les aires comprises entre les rayons vecteurs, menés de l'origine à trois points d'une trajectoire, sont proportionnelles aux tems employés à décrire les arcs interceptés, lorsque le corps ne se meut qu'en vertu d'une impulsion, ou lorsque les forces accélératrices qui l'animent sont dirigées vers l'origine.* On voit aussi que les aires ne peuvent être proportionnelles aux tems que dans ces deux cas, puisqu'ils sont les seuls dans lesquels la quantité $Xy - Yx$ soit nulle.

On remarquera qu'en changeant x en y et y en x, $\int(ydx - xdy)$ devient $\int(xdy - ydx)$; cette dernière intégrale représente donc aussi l'aire comprise entre deux rayons vecteurs AH et AM; celui-là fixe et placé en dessous de l'autre qui est variable.

Le même théorême a lieu lorsque la trajectoire est décrite dans l'espace; car si on multiplie la première des équations (c') par z, et la troisième par x, et qu'on les retranche; puis qu'on opère de même sur la seconde et la troisième, on aura dans les deux cas ci-dessus

$$\frac{xdz - zdx}{dt} = A, \quad \frac{ydz - zdy}{dt} = B.$$

On conclut de ces équations, qu'en nommant λ, λ', λ'' les projections de l'aire ξ décrite par le rayon vecteur, on a $d\lambda = Cdt$, $d\lambda' = Adt$, $d\lambda'' = Bdt$: or l'aire élémentaire $d\xi$ étant considérée comme plane, est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses trois projections (Compl. de Géom. de *Lacroix*, 61). Donc on a $d\xi = dt\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$; ce qui conduit à la même conséquence que ci-dessus : c'est elle qui constitue *le principe des Aires proportionnelles aux tems.*

II. *Mouvement des Projectiles.*

171. Pour appliquer les principes précédens à des exemples simples, nous prendrons d'abord le mouvement des projectiles dans le vide. Soit un point matériel A lancé dans le vide de la direction AD, avec la vîtesse U, produite par une impulsion. Si la gravité n'agissoit pas sur ce mobile, il parcourroit la droite AD uniformément; la pesanteur tend à l'écarter de cette droite, et lui fait décrire une courbe AMC que nous nous proposons de déterminer. Prenons l'axe des y vertical; comme il n'y a ici d'autre force que celle de la gravité, nous aurons $X = 0$, $Z = 0$; et $Y = -g$; ainsi les équations (c') Fig. 96.

deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2z}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-g\ldots\ldots\ldots(1).$$

En intégrant on obtient

$$\frac{dx}{dt}=c,\ \frac{dz}{dt}=c'',\ \frac{dy}{dt}=c'-gt.$$

La première de ces équations étant divisée par la seconde, on trouve en intégrant, $c''x=cz$; équation linéaire qui fait voir que la projection de la trajectoire sur le plan des xz, qui est horisontal, est une droite. Donc cette courbe est dans un plan perpendiculaire à celui des xz, et par conséquent vertical, passant par l'axe des y. Prenons le plan xy pour celui qui la contient, et nous n'aurons plus égard qu'aux équations

$$\frac{dx}{dt}=c,\ \frac{dy}{dt}=c'-gt\ldots\ldots(2).$$

En intégrant de nouveau on obtient

$$x=ct,\ y=c't-\tfrac{1}{2}gt^2\ldots\ldots\ldots(3).$$

On n'ajoute point ici de constantes, parce qu'on doit trouver à-la-fois $t=0$, $x=0$, et $y=0$. Pour déterminer les autres constantes c et c', il faut recourir au commencement du mouvement. $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sont à chaque instant les vîtesses du corps suivant les axes; si la vîtesse imprimée U est verticale, on a ensemble $t=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=U$, d'où $c=0$, $c'=U$. Les équations (3) deviennent celles du n°. (157, V) : et s'il n'a été donné aucune impulsion, c et c' sont nuls, ce qui redonne les équations (h). Mais si la vîtesse U fait avec l'axe des x l'angle θ, ses composantes sont $U\cos\theta$ et $U\sin\theta$; et comme ce sont les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, lorsque $t=0$, on a $c=U\cos\theta$, et $c'=U\sin\theta$.

D'ailleurs l'une des équations (3) est celle d'un mouvement uniforme; l'autre appartient à un mouvement uniformément varié : ce sont les équations des mouvemens de deux points matériels sur les axes des x et des y; voyez ce qui a été dit n°. 165. Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le tems t entre les deux valeurs (3); on trouve

$$y=\frac{c'}{c}\,x-\frac{gx^2}{2c^2}.$$

En substituant pour c et c' leurs valeurs, on a $\frac{c'}{c}=\text{tang}\,\theta$; et on met l'équation de la trajectoire sous la forme

$$y=x.\text{tang}\,\theta-\frac{gx^2}{2U^2.\cos^2\theta}\,\ldots\ldots\ldots\,(g').$$

On peut simplifier cette équation en mettant pour U^2 sa valeur $2gh$, h étant la hauteur due à la vîtesse U (156) : et on a

$$y=x\ \text{tang}\,\theta-\frac{x^2}{4h.\cos^2\theta}\,\ldots\ldots\ldots\,(h').$$

Cette équation est celle d'une parabole qu'il sera facile de construire : on trouvera qu'elle a son axe MB vertical, et que les coordonnées de son sommet sont .... $AB=2h.\sin\theta.\cos\theta=h.\sin(2\theta)$, et $BM=h\sin^2\theta$: son paramètre est $4h.\cos^2\theta$.

172. Les calculs précédens conduisent à plusieurs conséquences remarquables.

1°. *La trajectoire que décrivent les projectiles dans le vide est une parabole.*

2°. Le *maximum* d'élévation du projectile est le point qui a pour coordonnées $AB = h.\sin(2\theta)$, $BM = h.\sin^2\theta$: on peut encore parvenir à ce résultat, en égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ainsi que l'exige la théorie des *maxima*.

3°. L'*amplitude du jet* est $AC = 2h.\sin(2\theta) = 2 \times AB$; car en faisant $y = 0$ dans l'équation (h'), on trouve pour x cette valeur.

4°. Si on veut que cette amplitude soit la plus grande possible, pour une vitesse U donnée, il faut prendre pour θ la valeur qui rend $2h.\sin(2\theta)$, ou plutôt $\sin(2\theta)$, un maximum; ce qui a visiblement lieu lorsque $2\theta = \frac{1}{2}\pi$: donc $\theta = \frac{1}{4}\pi = 50°$ est l'arc qui mesure l'inclinaison correspondante à la plus grande portée. On seroit aussi parvenu à ce résultat en différentiant $2h.\sin(2\theta)$ par rapport à θ, et égalant ensuite à zéro.

5°. En général, lorsque la vitesse de projection est donnée, on peut se proposer de déterminer l'inclinaison qu'elle doit avoir pour qu'il en résulte une portée connue, et $= P$; alors il faut tirer la valeur de θ de l'équation $P = 2h.\sin(2\theta)$, ce qui donne $\theta = \frac{1}{2}.\text{arc}\left(\sin = \frac{P}{2h}\right)$. On voit d'abord que pour que le problême ne soit pas absurde, il faut qu'on ait $P < 2h$: on observe en outre qu'il
Fig. 97. y a deux solutions. En effet, soit $K'E' = \frac{P}{2h}$, le rayon AI étant $= 1$; la droite AD qui divise en deux parties égales l'arc $K'DI$ qui a pour sinus $\frac{P}{2h}$, satisfait à la question.

Menons $K'K$ parallèle à $I'I$, l'arc IK a aussi pour sinus $K'E'$; donc la droite AD' qui divise cet arc en deux parties égales correspondroit à la même portée. On peut même ajouter que les droites AD et AD', forment, de part et d'autre, des angles égaux avec la ligne AO qui divise l'angle droit LAI en deux parties égales; car $IK + ILK'$ valent visiblement π : la somme de la moitié de ces arcs est donc $\frac{1}{2}\pi$: ainsi $ID + ID' = IL$, d'où $ID' = LD$, et par conséquent $OD = OD'$.

6°. Si la position du but est donnée, soient ses coordonnées a et b, on auroit $b = a \tang \theta - \frac{a^2}{4h \cos \theta^2}$, d'où on tire pour l'angle θ que doit faire avec l'horison l'impulsion primitive V

$$\tang \theta = \frac{1}{a}\{2h \pm \sqrt{(4h^2 - 4hb - a^2)}\}$$

Ainsi il y a deux trajectoires pour une vîtesse initiale donnée; ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu (5°.).

7°. Si la vîtesse U est imprimée verticalement de bas en haut, on a $\theta = \frac{1}{2}\pi$; alors l'équation (h') ne peut être employée; mais les expressions (3) deviennent $x = 0$, et $y = Ut - \frac{1}{2}gt^2$; la première indique que le corps n'a point de mouvement dans le sens des x; la seconde est la même que nous avons employée (157, V).

173. Cherchons maintenant la trajectoire des projectiles dans les milieux résistans; telle est celle que décrit un corps lancé par une bouche à feu dans l'atmosphère. Nous ferons voir (222) que la résistance des fluides est assimilée à une force retardatrice, qui est proportionnelle au carré de la vîtesse, et dont la direction est sans cesse opposée à celle du mouvement; ainsi il suffit d'introduire la considération de cette puissance dans la question que nous venons de

résoudre ; et nous aurons à analyser les circonstances du mouvement d'un corps en vertu d'une force de projection, et de deux forces continues, la gravité g, et la résistance R du fluide : l'une qui agit verticalement de haut en bas, et l'autre qui est dirigée suivant la tangente en chaque point de la trajectoire.

On a coutume de substituer à cette courbe la parabole, parce qu'elle est la trajectoire dans le vide, et qu'on regarde l'air comme un fluide assez subtil, pour que la résistance qu'il oppose puisse être négligée : elle est en effet peu sensible, lorsque la vitesse du mobile est très-petite. Mais dans le cas contraire, qui se rencontre beaucoup plus fréquemment, l'erreur est si considérable, qu'elle peut aller même jusqu'à donner une portée dix fois trop grande. Voyez à cet égard le n°. 222. Le problême de la *Ballistique* est donc aussi intéressant comme objet d'application qu'il l'est sous le point de vue analytique. NEWTON, EULER et dernièrement LEGENDRE ont donné des solutions élégantes de cette question ; et si elles sont compliquées, on peut voir que cette difficulté est inévitable et tient à la nature même du problême.

Fig. 97. Prenons l'axe des y vertical : désignons par x, y et z les coordonnées du lieu du mobile au bout du tems t, et par s l'arc décrit. On sait que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, et $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles formés par la tangente avec les axes respectifs des x, des y et des z : ainsi les composantes de la force R dans le sens de chacun de ces axes, sont $R.\frac{dx}{ds}$, $R.\frac{dy}{ds}$ et $R.\frac{dz}{ds}$; les équations (a') deviennent donc ici, $X=-R.\frac{dx}{ds}$, $Y=-\left(R.\frac{dy}{ds}+g\right)$, $Z=-R.\frac{dz}{ds}$: on affecte ces forces de signes négatifs,

parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées x, y et z. Les équations (b') donnent donc

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -Rdt.\frac{dx}{ds}$$

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(R.\frac{dy}{ds} + g\right)dt$$

$$d\left(\frac{dz}{dt}\right) = -Rdt.\frac{dz}{ds}.$$

Si on prend dt constant, en divisant la première équation par la troisième on a $\frac{d^2x}{d^2z} = \frac{dx}{dz}$, d'où..... $\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2z}{dz}$, et intégrant par logarithmes on conclut $dx = fdz$: donc l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xz, qui est horisontal, est celle d'une droite : cela prouve que cette courbe est dans un plan vertical qui passe par l'origine ; ce qu'on eût pu aisément prévoir.

En regardant cette courbe comme située dans le plan xy, la troisième équation ci-dessus devient inutile : quant aux deux premières, comme aucune différentielle n'y est constante, en prenant dx constant on a

$$d^2t = \frac{dt^3}{ds}.R \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

$$\frac{dt.d^2y - dy.d^2t}{dt^2} = -\frac{dy}{ds}.Rdt - gdt.$$

Si on substitue dans celle-ci pour R sa valeur $\frac{ds.d^2t}{dt^3}$, tirée de la première, elle devient

$$d^2y + gdt^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Il s'agit maintenant d'éliminer le tems t entre les deux équations (1) et (2) : mais comme on doit pour cela traiter dt et d^2t comme deux inconnues, il faut se procurer une troisième équation. On l'obtient en différentiant la précédente, et on a $d^3y + 2gdt.d^2t = 0$; et mettant pour d^2t sa valeur (1), on a $d^3y + 2g.\frac{dt^4}{ds}.R = 0$. Or comme la résistance R est proportionnelle au carré de la vitesse v, on doit avoir

$$R = \tfrac{1}{2} A.v^2 = \tfrac{1}{2} A.\frac{ds^2}{dt^2}$$

$\frac{1}{2} A$ étant un coefficient constant que l'expérience fait connoître, dont la valeur dépend de la nature du fluide résistant et de la figure du corps. Cette valeur introduite dans l'équation précédente donne $d^3y + Ag.dt^2.ds = 0$, ou plutôt, en substituant pour dt^2 sa valeur (2),

$$\frac{d^3y}{d^2y} = Ads.$$

Le premier membre ayant pour intégrale log (d^2y), on a donc log $(Cd^2y) = As$, ou plutôt à cause de l'homogénéité et de dx constant, log $\left(C.\frac{d^2y}{dx^2}\right) = As$. Ainsi, en désignant par e le nombre dont le logarithme népérien est l'unité, on a pour l'équation différentielle de la trajectoire

$$e^{As} = C.\frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots (3).$$

Pour déterminer la constante C, il faut remonter aux circonstances initiales du mouvement : mettons $-gdt^2$ pour d^2y, nous aurons $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.e^{As} = -Cg$: or $\frac{dx}{dt}$ est la vîtesse du mobile dans le sens des x, au tems t : soit U la vîtesse imprimée, θ l'angle que sa direction fait avec l'horison : nous avons donc en même tems $t=0$, $x=0$, $y=0$, $s=0$, et $\frac{dx}{dt}=U\cos\theta$; donc $U^2.\cos^2\theta=-Cg$. On peut aussi mettre pour U^2, sa valeur $2gh$, h étant la hauteur due à cette vîtesse (156); et on a $C=-2h.\cos^2\theta$. L'équation (3) devient donc

$$-e^{As}=2\,h.\cos^2\theta.\frac{d^2y}{dx^2}=2\,h.\cos^2\theta.\frac{dp}{dx}\ \ldots\ldots(4)$$

en supposant $dy=pdx$, ce qui donne $ds=dx\sqrt{(1+p^2)}$; comme s croît toujours en même tems que x, on doit prendre le radical avec le signe $+$ dans toute l'étendue de la courbe : en multipliant ces deux équations, on trouve

$$-e^{As}ds=2\,h.\cos^2\theta.dp.\sqrt{(1+p^2)}\ \ldots\ldots\ldots(5).$$

Le premier membre a visiblement pour intégrale $-\frac{1}{A}.e^{As}$; quant au second membre, en faisant $\sqrt{(1+p^2)}=t-p$, on a $dp.\sqrt{(1+p^2)}=tdp-pdp$; et comme $p=\frac{t^2-1}{2t}$, on a $dp=\frac{t^2+1}{2t^2}.dt$. On a donc

$$\int dp.\sqrt{(1+p^2)}=\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{2}\log t-\tfrac{1}{2}p^2;$$

et remettant pour t sa valeur $p+\sqrt{(1+p^2)}$, on a

$$\int dp.\sqrt{(1+p^2)}=\tfrac{1}{2}\{p.\sqrt{(1+p^2)}+\log(p+\sqrt{(1+p^2)})+C\}.$$

Ainsi l'intégrale de notre équation est

$$-e^{As}=Ah\cos^2\theta\{p.\sqrt{(1+p^2)}+\log(p+\sqrt{(1+p^2)})\pm C\}\ldots(6).$$

Observons maintenant que p est la tangente de l'angle α que

Mettant dans l'équation (i') pour s' la valeur que nous venons d'obtenir, on parvient à cette relation remarquable entre les arcs s et s'

$$e^{As} = 1 + As', \text{ ou } As = \log(1 + As') \;\ldots\ldots\; (k').$$

275. Cette relation est très-propre à faire connoître certaines particularités de la forme de la trajectoire cherchée : elle fait voir que s' croît en même tems que s, mais d'une manière bien plus rapide. Or on sait que plus le point qui termine l'arc de parabole est éloigné de son sommet, et plus la tangente à l'extrémité de cet arc approche d'être parallèle à son axe : il en résulte que la tangente menée à l'extrémité de l'arc s devient d'autant plus voisine de la verticale que s est plus grand ; alors p est très-près de l'infini. Pour savoir avec rigueur ce qui se passe alors, éliminons s entre (4) et (6) ; nous aurons en fonction de p la valeur de $\frac{dp}{dx}$, qui feroit connoître, après l'intégration, l'abscisse du point de la courbe dont la tangente a une inclinaison donnée. Mais s'il ne s'agit que des points de la branche descendante Es, qui sont éloignés du sommet E, il faut intégrer entre deux valeurs très-grandes de p : on doit donc négliger dans (6) devant p^2 les termes constans, et même $\log p$. Ainsi $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2} Ap^2$. L'intégrale est $x = c - \frac{2}{Ap}$; ce qui donne x fini quand p est infini : ainsi *la branche descendante* EF *a une Asymptote verticale*.

Fig. 97.

Si on fait s et s' négatifs dans la formule (k'), elle devient $-As = \log(1 - As')$: les arcs s et s' sont pris de A vers N et N' sur les courbes EAN, DAN' continuées en deçà du point A. L'équation précédente donne s

infini lorsque $s' = \frac{1}{A}$; ce qui fait voir que si on prend sur la parabole DAN', un arc AN' numériquement égal à $\frac{1}{A}$, la tangente $N'V'$ au point N', est parallèle à celle qu'on mèneroit à l'infini sur la branche AN; ainsi la trajectoire a une autre asymptote NV parallèle à $N'V'$: ce qui fait voir que cette courbe est formée de deux branches dissemblables.

176. Quoique l'équation (i') ne soit pas en x et y, elle n'est pas moins propre à décrire et calculer les parties de la trajectoire : car si on regarde les petits arcs Ab, bc, co, ... comme des lignes droites, leurs inclinaisons mutuelles seront très-petites. On peut, par exemple, concevoir les longueurs de ces arcs telles que les angles qu'ils forment décroissent de degré en degré. Pour chacun de ces arcs la valeur de α sera déterminée d'avance, et la formule (i') servira à déterminer la longueur correspondante de cet arc. Dans le triangle cof, on connoîtra donc l'angle c, et l'hypothénuse co; ainsi on pourra en calculer la base cf et la hauteur fo. En opérant de même sur chaque petit arc, et réunissant ensuite les bases entre elles, ajoutant pareillement les hauteurs; on aura l'abscisse, l'ordonnée et la longueur de l'arc qui répondent à une valeur donnée de α : il faudra opérer séparément sur les deux branches, et prendre toutes les valeurs intermédiaires de degré en degré, depuis $\alpha = \theta$ jusqu'à $\alpha = 0$ pour la branche ascendante; et depuis $\alpha = 0$ jusqu'à α égal à la valeur $> \frac{1}{2}\pi$ qui répond à un point déterminé de la branche descendante. En faisant $\alpha = 0$, on auroit la longueur entière de la branche ascendante.

Ainsi on pourra construire des tables pour toutes les portées et les inclinaisons. Le calcul de chaque trajectoire

16

n'est d'ailleurs pas aussi long qu'il le paroît d'abord ; car, 1°. f est constant dans toute l'étendue de la même courbe ; 2°. la quantité $p.\sqrt{(1+p^2)}+\log(p+\sqrt{(1+p^2)})$, calculée de degré en degré, servira pour toutes les trajectoires ; 3°. lorsqu'on rend $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ pour calculer la branche descendante, cette dernière valeur change de signe, mais elle conserve la même grandeur : cela est évident pour le premier terme, qui change de signe avec p : quant au second, il devient $\log(-p+\sqrt{(1+p^2)})$; or en multipliant et divisant la quantité $-p+\sqrt{(1+p^2)}$ par $p+\sqrt{(1+p^2)}$, on obtient $\log\left(\frac{1}{p+\sqrt{(1+p^2)}}\right)$, qui équivaut à $-\log(p+\sqrt{(1+p^2)})$; 4°. le calcul de la quantité $p.\sqrt{(1+p^2)}+\log(p+\sqrt{(1+p^2)})$ est d'ailleurs facile à effectuer, puisqu'elle est............

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\log.\mathrm{tang}\,(50^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)\ ;$$ 5°. enfin vers le sommet de la courbe les arcs devant être fort petits, afin de diminuer le nombre des opérations, on pourra employer, au lieu des cordes, les arcs de cercles osculateurs. Ce n'est pas ici le lieu de nous étendre sur cette matière, qu'on trouvera suffisamment détaillée dans le XI^e cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, page 222, par M. *Moreau*.

177. L'équation (i') ne donne point la relation entre x et y, et il est pourtant utile d'obtenir cette relation, au moins par approximation. Pour cela, reprenons l'équation (6), dans laquelle, en faisant $s=0$ et $p=\mathrm{tang}\,\theta$, on a trouvé la constante $C=-\dfrac{1}{Ah\cos^2\theta}-f$. En substituant pour e^{As} sa valeur tirée de l'équation (4), on obtient

$$\frac{dp}{dx}=\frac{-1}{2h\cos^2\theta}+\tfrac{1}{2}A\left\{p.\sqrt{(1+p^2)}+\log(p+\sqrt{(1+p^2)})-f\right\}$$

Pour exécuter une nouvelle intégration, on supposera que $p=\text{tang}\,\theta+A'x+B'x^2+\text{etc.}$, A', B',....étant des coefficiens indéterminés : on en tirera aisément la valeur de $\frac{dp}{dx}$; de sorte qu'en substituant dans l'équation précédente, on aura une équation identique, d'où on déduira les valeurs de A', B',..... Donc enfin

$$p=\text{tang}\,\theta-\frac{x}{2h\cos^2\theta}-\frac{Ax^2}{4h.\cos^3\theta}-\text{etc.}=\frac{dy}{dx};$$

et en intégrant de nouveau on obtient enfin

$$y=x.\text{tang}\,\theta-\frac{x^2}{4}\cdot\frac{1}{h\cos^2\theta}-\frac{x^3}{3.4}\cdot\frac{A}{h.\cos^3\theta}$$
$$-\frac{x^4}{2.3.4}\cdot\left(\frac{A^2}{2h.\cos^4\theta}-\frac{A\sin\theta}{4h^2.\cos^4\theta}\right)+\text{etc.}$$

Cette formule est assez convergente lorsque θ est fort petit et que la vîtesse initiale n'est pas très-considérable, comme lorsqu'elle n'excède pas 70 mètres par seconde : ainsi on peut l'employer avec avantage lorsqu'il s'agit du tir à *Ricochet*. Consultez à cet égard un fort beau Mémoire de *Borda*, Acad. des Sciences, 1769.

Lorsque la résistance est nulle, on a $A=0$, et on retrouve la formule (*h'*pag. 231).

III. *Des Forces Centrales.*

178. Examinons le mouvement d'un corps qui étant lancé dans le vide avec une force de projection quelconque, seroit attiré vers un point fixe par une force

Centripète, dont l'action varieroit à différentes distances de ce point.

Menons par le centre d'attraction trois axes rectangulaires, et désignons par P la valeur absolue de la force centripète à un instant quelconque : le rayon vecteur mené du centre au lieu où se trouve le mobile à cet instant, fait avec les axes des angles dont les cosinus sont $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$; ainsi les composantes de la force P sont $\frac{Px}{r}$, $\frac{Py}{r}$, $\frac{Pz}{r}$. Si donc on prend dt constant, on trouve pour les formules (c'), en observant que ces forces tendent à diminuer les coordonnées

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Px}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Py}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{Pz}{r} \ldots\ldots (1).$$

Il s'agit d'intégrer ces équations.

Multiplions la première par y, la seconde par x, et soustrayons le premier produit du second, nous aurons $\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = 0$, et intégrant

$$xdy - ydx = cdt \ldots\ldots\ldots (2).$$

un calcul semblable pour la troisième donne

$$zdx - xdz = c'dt,$$
$$ydz - zdy = c''dt.$$

Ces formules reproduisent les équations $(f'$, 170) par le calcul même que nous venons d'exécuter ici pour montrer comment disparoissent les termes qui proviennent des forces centrales. Multiplions ces équations respectives
z, et ajoutons, nous aurons $c''x + c'y + cz = 0$;
i appartient à la trajectoire, puisque le tems

est éliminé ; d'où il suit que cette courbe est dans un plan qui passe par le centre des forces. Ce résultat, qu'on pouvoit d'ailleurs prévoir, permet de ne plus traiter le problême qu'en deux dimensions, en prenant pour plan des xy celui de l'orbite. Soit donc FDM la trajectoire, M le lieu du mobile à l'instant t, A le centre des forces, Ax et Ay les axes; on aura $AP=x$, $PM=y$, $AM=r$, et l'angle $MAx=u$: il suffira d'employer les deux premières équations (1), qui produisent celle (2). Fig. 95 et 98.

Le triangle rectangle MAP donne pour la transformation en coordonnées polaires

$$\left.\begin{aligned} &x=r\cos u,\ y=r\sin u,\ r^2=x^2+y^2\\ \text{d'où}\quad &dx=-r\sin u.du+\cos u.dr,\\ &dy=\ \ r\cos u.du+\sin u.dr,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(3).$$

Ainsi $xdy-ydx=r^2du$, ce qui change l'équation (2) en

$$r^2du=cdt\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Or on sait (170) que $\int r^2du$ ou $\int(xdy-ydx)$ est le double de l'aire ζ comprise entre deux rayons vecteurs AH et AM dont l'un a une position fixe ; donc cette aire $\zeta=\frac{1}{2}ct+A$ ou plutôt $\zeta=\frac{1}{2}ct$, en prenant pour le rayon fixe AH celui qui passe par le lieu du mobile lorsque $t=0$. Ainsi *quelle que soit la force centrale, l'aire décrite par le rayon vecteur pendant le tems* t, *est proportionnelle à ce tems.*

Prenons sur le rayon vecteur AM un point distant du centre A d'une longueur égale à l'unité, ce point décrit une circonférence lorsque le rayon vecteur suit le corps M dans son orbite, et la vîtesse que ce point prend à chaque instant, mesure celle du rayon, et par conséquent celle du corps : c'est ce qu'on appelle la *vîtesse angulaire* du rayon vecteur ; elle est exprimée par $\frac{du}{dt}=\frac{c}{r^2}=\nu$; donc *la vitesse angulaire est réciproquement proportionnelle au carré de la distance du mobile au centre.*

Fig. 91. Abaissons de l'origine A une perpendiculaire AI sur la tangente en M, la longueur δ de cette ligne est aisée à trouver; elle est

$$\delta = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

ou

$$\delta = \frac{cdt}{ds} = \frac{c}{v}$$

en faisant usage des valeurs (2 et 4) et à cause que la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$: ainsi *la vitesse effective du mobile, dans un point quelconque de son orbite, est réciproque à la longueur de la perpendiculaire menée du centre sur la tangente en ce point.*

179. Reprenons les deux premières équations (1), et multiplions-les respectivement par dx, dy, puis ajoutons; nous aurons, à cause de $xdx + ydy = rdr$,

$$\frac{dx \,.\, d^2x + dy \,.\, d^2y}{dt^2} = - Pdr.$$

Comme l'intensité de la force P varie, par hypothèse, d'une manière connue, avec la distance au centre, P est supposé une fonction connue de r; ainsi l'intégrale $\int Pdr$ est facile à trouver : faisons

$$\int Pdr = \psi + \alpha,$$

α étant la constante arbitraire; il vient

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2(\psi + \alpha) = v^2 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Cette équation est celle des forces vives (168) : et les formules (2) et (5) sont les deux intégrales du premier ordre des équations (1), qu'elles doivent remplacer. Les constantes α et c sont engagées dans ces formules avec des quantités qui déterminent la vîtesse du corps, elles dépendent donc de la force de projection, ou, si on veut, de la vîtesse en un point déterminé de l'orbite.

Si on conçoit sur une ligne quelconque Ax un autre mobile, attiré vers le point A par la même force P, l'équation $\varphi de = vdv$ (152, e) déterminera les lois de son mouvement rectiligne; et comme $de = -dr$, $vdv = -Pdr$, d'où $v^2 = -2(\psi + \alpha')$. Ainsi la vitesse de ce second mobile sera la même que celle du premier, à même distance du centre, pourvu qu'une fois ils aient eu tous deux la même vîtesse pour des distances égales; car alors $\alpha = \alpha'$. C'est la 40^e proposition, section VIII, du livre des Principes de Newton.

Transformons les coordonnées dans l'équation (5), il vient les deux intégrales du premier ordre

$$r^2du = cdt,\quad dr^2 + r^2du^2 = -2(\psi + \alpha)\,dt^2,$$

en éliminant dt, on a pour l'équation de la trajectoire

$$du = \frac{cdr}{r\sqrt{\{-2r^2(\psi + \alpha) - c^2\}}} \quad\ldots\ldots\ldots (6);$$

et comme les variables u et r sont séparées, on pourra intégrer et construire : il faut en dire autant de l'équation $dt = \frac{r^2du}{c}$, puisque du est connu en fonction de r; on a donc le lieu du mobile à chaque instant. Le radical donne ici le signe $\pm$, et on devra préférer le signe $+$ lorsque u et r croîtront ensemble, et le signe $-$ dans le cas contraire, ce qui ne dépend que de l'impulsion donnée au corps.

180. Prenons le cas où la force est proportionnelle à la Fig. 55. distance; supposons de plus que le mobile posé en F ait reçu une impulsion dans une direction FV perpendiculaire à AF, V désignant la vitesse imprimée. On aura $P = \mu r$, μ étant une constante qui représente l'intensité de la force centrale, lorsque la distance $r = 1$. On en déduit $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\mu r^2$ et $v^2 = -\mu r^2 - 2a$: or V est la valeur de v lorsque $r = AF = a$, ainsi $-2a = V^2 + \mu a^2$: de plus, la vitesse angulaire du rayon AF étant $u = \frac{c}{a^2}$, (178), on en conclut pour la vitesse en F, $v = au = \frac{c}{a}$; mais cette vitesse est V, donc $c = aV$. Telles sont les valeurs des constantes c et a dans le cas présent : on voit comment elles dépendent de la force de projection, et ce qu'il faudroit faire pour les déterminer dans toute autre hypothèse. Nos valeurs 5 et 6 deviennent donc

$$v^2 - V^2 = \mu(a^2 - r^2), \quad du = \frac{-aV\,dr}{r\sqrt{\{-\mu r^4 + r^2(V^2 + \mu a^2) - a^2V^2\}}}.$$

On a mis ici le signe — parce que u décroît tandis que r croît. Or il est facile de décomposer le radical en deux facteurs, $\mu r^2 - V^2$ et $a^2 - r^2$: ainsi

$$du = \frac{-aV\,dr}{r\sqrt{(\mu r^2 - V^2)}\sqrt{(a^2 - r^2)}}.$$

Pour intégrer cette formule, on fait $\sqrt{(a^2 - r^2)} = pr$, d'où $r = \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)}}$: substituant pour r et dr leurs valeurs, on a

$$du = \frac{V\,dp}{\sqrt{(\mu a^2 - V^2 - V^2p^2)}}.$$

L'intégrale est $u + \text{const} = \text{arc}\left(\sin = \frac{Vp}{\sqrt{(\mu a^2 - V^2)}}\right)$; et comme $r = AF = a$ donne $u = \pi$ et $p = 0$, la constante est nulle. Remettant pour p sa valeur en r, on a $V^2(a^2 - r^2) = r^2(\mu a^2 - V^2)\sin^2 u$; puis repassant aux coordonnées rectangles à l'aide des formules (3), on obtient

$$V^2x^2 + \mu a^2y^2 = a^2V^2,$$

équation d'une ellipse dont le centre est à l'origine A, et dont les demi-axes sont a et $\frac{V}{\sqrt{\mu}}$: le sommet est en F.

Dans une ellipse dont a et b sont les demi-axes, on a pour la perpendiculaire AI abaissée sur la tangente, $\delta = \frac{a^2b}{\sqrt{\{a^4 - x^2(a^2 - b^2)\}}}$; la plus petite valeur de δ répond à $x = 0$, la plus grande à $x = a$; l'une est b, l'autre est a : or $\delta = \frac{c}{v}$, ainsi la plus grande vitesse est $a\sqrt{\mu}$ à l'extrémité D du petit axe; la plus petite est V, elle a lieu à l'extrémité F du grand axe. Comme $b = \frac{V}{\sqrt{\mu}}$, on a pour la vitesse en un point M quelconque

$$v^2 = a^2\mu - x^2\left(\mu - \frac{V^2}{a^2}\right).$$

Au reste ces diverses circonstances sont données par l'équation $v^2 = V^2 + \mu(a^2 - r^2)$.

Soit ξ l'aire xAM; les aires sont proportionnelles aux tems employés à les décrire; et puisque $\frac{1}{2}c$ est l'aire décrite pendant l'unité de tems, on a $\frac{t}{\xi} = \frac{1}{\frac{1}{2}aV}$, ou $t = \frac{2\xi}{aV}$; équation qui donne le lieu du mobile à chaque instant : l'aire totale $= \pi ab$ (*Cal. int.* Lacroix 227) le tems T de la révolution entière est donc

$$T = 2\pi . \frac{b}{V} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Ce tems est le même (144) qu'emploieroit un mobile à décrire un cercle de rayon b avec la vitesse uniforme V : et comme il est indépendant de a, b et V, on voit que *plusieurs corps décrivent leurs ellipses autour du même centre d'attraction, durant le même tems.*

181. Traitons, pour dernier exemple, le cas de la nature, c'est celui où la force P est en raison inverse des carrés des distances, ce qui suppose $P = \frac{\mu}{r^2}$, $\psi = -\frac{\mu}{r}$, d'où

$$v^2 = 2\left(\frac{\mu}{r} - \alpha\right), \quad du = \frac{cdr}{r\sqrt{\{2r\mu - 2\alpha r^2 - c^2\}}}.$$

Pour intégrer cette dernière équation, supposons.... $r = \frac{c^2}{\mu + p}$, et substituons pour r et dr leurs valeurs ; en faisant, pour abréger, $\mu^2 - 2\alpha c^2 = k^2$, il vient $du = \frac{-dp}{\sqrt{(k^2 - p^2)}}$, dont l'intégrale est

$$u = \theta + \text{arc}\left(\cos = \frac{p}{k}\right), \quad \text{ou } p = k\cos(u - \theta).$$

Remettant pour p sa valeur $\frac{c^2}{r} - \mu$, on a enfin pour équation de l'orbite

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}\left\{1 + \frac{k}{\mu}\cos(u - \theta)\right\}$$

Cela posé (voyez *Appl. d'Alg. à la Géom.*, par Lacroix, Fig. 58.
n°. 112; et *Géom. analy.* de Biot, n°. 154), on sait que la longueur du rayon vecteur r, mené du foyer A à l'un des points d'une ellipse est $r = \frac{a^2 - lx'}{a}$, a étant le demi-grand axe, l désignant l'*Excentricité* ou la distance OA du centre au foyer; enfin l'origine des x' étant au centre O. Soit ε l'angle MAH formé par le grand axe AH et le rayon vecteur AM, on a $OQ = x' = r\cos\varepsilon + l$, d'où

$$r = \frac{a^2 - l^2}{a + l\cos\varepsilon} \quad \text{ou} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varepsilon},$$

en supposant, pour abréger, $e = \frac{l}{a}$ = le rapport de l'excentricité au demi-grand axe. Prenons une autre droite quelconque Ax passant en A et faisant avec le grand axe AH un angle θ, nous aurons, en nommant u l'angle MAx, $\varepsilon = u - \theta$: donc l'équation de l'ellipse, rapportée à une droite quelconque menée par le foyer, est

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(u - \theta)}{a(1 - e^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7).$$

En comparant cette équation à celle de notre trajectoire, on reconnoît qu'elles deviennent identiques, lorsqu'on pose

$$\frac{c^2}{\mu} = a(1 - e^2), \quad \frac{k}{c^2} = \frac{e}{a(1 - e^2)}.$$

Ces équations sont propres à déterminer dans tous les cas les constantes a et e de l'ellipse, et on a

$$e = \frac{k}{\mu}, \quad a = \frac{c^2\mu}{\mu^2 - k^2} = \frac{\mu}{2\alpha},$$

d'où il suit que notre courbe est une *Ellipse* dont le foyer est au centre d'attraction, et qu'on peut aisément décrire lorsque les constantes α, c et k sont connues, puisqu'on connoît alors la position et la longueur du grand axe, ainsi que l'excentricité. Ces constantes dépendent de la force de projection, ou, si on veut, de la vîtesse du corps à un instant et dans une position déterminés. On doit remarquer ici que l'équation (7) appartient à la *Parabole* lorsque $e=1$, ou $a=\infty$, ce qui arrive lorsque $k=\mu$, et par conséquent $\alpha=0$; et qu'elle est celle d'une *Hyperbole* lorsque k est $>\mu$, auquel cas a et α sont négatifs : alors la trajectoire n'est plus une ellipse, mais *dans tous les cas elle est une section conique.*

Comme $\frac{1}{2}c$ est l'aire décrite dans l'unité de tems, on a, par la proportionnalité des aires aux tems, en désignant par T le tems d'une révolution entière, $\frac{\frac{1}{2}c}{1} = \frac{\pi a^2\sqrt{(1-e^2)}}{T}$, car l'aire de l'ellipse est $\pi ab = \pi a^2\sqrt{(1-e^2)}$: ainsi $1-e^2$ étant $=\frac{c^2}{a\mu}$, on a

$$T^2=\frac{4\pi^2}{\mu}a^3.$$

Pour un corps décrivant une autre ellipse $\frac{4\pi^2}{\mu}$ seroit le même coefficient : ainsi *les carrés des tems des révolutions sont comme les cubes des grands axes des orbites.*

La vîtesse à chaque instant est donnée par la formule $v^2=2\left(\frac{\mu}{r}-\alpha\right)$, de sorte qu'elle est la plus grande ou la plus petite, suivant que r est lui-même plus petit ou plus grand, ce qui arrive aux deux sommets; donc la vîtesse est la plus petite en F et la plus grande en H;

ces deux points se nomment les *Apsides*; H est le *Périhélie* (*); F est l'*Aphélie*. La formule $\delta = \frac{c}{v}$ donne la même conséquence.

L'équation (4), $r^2 du = c dt$ va nous donner le lieu du corps à chaque instant; en effet, substituons y la valeur de du en r et dr, et mettons pour e^2 et a leurs valeurs $a\mu(1-e^2)$ et $\frac{\mu}{2a}$, nous aurons

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{\mu}\sqrt{\left\{2r - \frac{r^2}{a} - a(1-e^2)\right\}}}$$

qui, intégrée, donne t en fonction de r. Pour y parvenir, faisons $r = a(1 - e\cos\lambda)$, et mettons pour r et dr leurs valeurs, il viendra $\sqrt{\mu}.dt = a^{\frac{3}{2}}(1 - e\cos\lambda)d\lambda$: on intègre et faisant $a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\mu} = n$, on obtient $nt + B = \lambda - e\sin\lambda$; B est la constante arbitraire : mais si on veut compter les tems à partir de celui où le corps a passé au périhélie H, B est nul, parce que $u = 0$ donne $r = AH = a(1-e)$, (ce qui est d'ailleurs visible) valeur qui répond à $\cos\lambda = 1$. On a donc

$$nt = \lambda - e\sin\lambda, \quad r = a(1 - e\cos\lambda) \; \ldots\ldots\ldots (8).$$

Il faudroit éliminer λ; mais la difficulté des calculs fait préférer de laisser cet angle et de s'en servir comme d'une auxiliaire : on le nomme *Anomalie* (**) *Excentrique*. On

---

(*) APHÉLIE de ἀπὸ, *ab, longè*, ἥλιος *sol*; loin du soleil.
PÉRIHÉLIE de περὶ, *circa*, ἥλιος *sol*; autour du soleil.

(**) ANOMALIE de α privatif ὁμαλος *æqualis*, régulier : ce mot signifie irrégularité, parce que l'anomalie est en effet la loi des irrégularités apparentes des mouvemens planétaires; car elle est l'angle formé par la ligne des absides et le rayon vecteur mené au lieu réel ou moyen de la planète.

l'exacte concordance des résultats que nous venons de trouver avec les phénomènes de la physique céleste, que nous établissons cette vérité ; mais parce que ces phénomènes sont susceptibles d'être soumis à un calcul rigoureux. Pour le faire voir, nous allons reprendre le problème en sens inverse ; car les équations (α) ne sont pas seulement propres à faire connoître le mouvement produit par des forces données, mais encore à déterminer la nature des forces, lorsque les circonstances du mouvement sont connues : ce qui suit peut en servir d'exemple, et faire concevoir la manière de procéder en pareil cas.

Nous regarderons ici les lois de Képler comme démontrées par l'observation : les détails dans lesquels nous serions obligés d'entrer pour exposer comment elle a pu faire connoître ces lois, nous écarteroient trop du but que nous nous proposons ; c'est pourquoi nous renvoyons à l'*Exposition du Système du Monde* de Laplace, et à l'*Astronomie* de Bailly. Ces deux ouvrages sont des modèles d'éloquence et de profondeur, qu'on ne peut négliger de lire ni d'admirer : mais comme ils sont abstraits, on pourra d'abord consulter l'*Astronomie* de Biot, et particulièrement le chap. 5, livre II, et les chap. 3 et 4, livre IV. Les phénomènes qui servent de base à la théorie que nous voulons exposer, sont connus sous la dénomination de lois de Képler, du nom du savant célèbre qui les a découvertes : voici leur énoncé.

1°. *Les aires décrites autour du centre du soleil, par les rayons vecteurs des planètes, sont proportionnelles aux tems employés à les décrire.*

2°. *Les orbes planétaires sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un des foyers.*

3°. *Les carrés des tems des révolutions des planètes,* *sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

Nous regarderons donc ici ces lois comme des vérités dues à l'expérience : Képler les a obtenues par une longue suite d'observations; on les a depuis confirmées, et il est impossible d'élever le plus léger doute à cet égard. Il s'agit maintenant de remonter du mouvement de chaque planète à la force qui le produit, en partant de ces lois : si on compare tout ce qu'on vient d'exposer à ce qu'on a démontré dans le chapitre précédent, on remarque que ce problême est l'inverse de celui qui y a été résolu ; et on voit les résultats que nous y avons obtenus s'accorder parfaitement avec les lois qui nous servent ici de base. Nous ne considérerons ici que le soleil et une planète, telle que la terre, par exemple.

184. Soient x et y les coordonnées rectangles AP et PM du lieu d'une planète M dans son orbite FDM, l'origine A étant au centre du soleil : nommons de plus X et Y les forces dont cette planète est animée dans son mouvement autour du soleil, parallélement aux axes des x et des y : les équations (c'), sont $d^2x = Xdt^2$, $d^2y = Ydt^2$; dt est ici constant. Si on retranche les produits respectifs de ces deux équations, par y et par x, on a .... $x.d^2y - y.d^2x = (xY - yX)\, dt^2$. Le premier membre est la différentielle de $x.dy - y.dx$: or on a vu (170) que $\int(xdy - ydx)$ est le double de l'aire que décrit le rayon vecteur AM de la planète, pendant le tems t, autour du soleil : d'après la première loi de Képler, cette aire étant proportionnelle au tems, on a $\int(xdy - ydx) = ct$; d'où on tire Fig. 98.

$$xdy - ydx = cdt, \text{ et } Yx - Xy = 0.$$

Il suit de là (170) que les forces X et Y ont leur résultante dirigée vers le centre du soleil, qui est à l'origine des coordonnées. D'ailleurs la courbe décrite par la planète étant concave vers le soleil, il est visible que la force qui fait décrire cette courbe tend vers ce point. La loi des aires proportionnelles aux tems employés à les décrire, nous conduit donc à ce premier résultat remarquable, *la force qui sollicite chaque planète est dirigée vers le centre du soleil.*

185. Déterminons la loi suivant laquelle cette force agit à différentes distances de cet astre : il est clair que les planètes, s'approchant et s'éloignant alternativement du soleil à chaque révolution, la nature du mouvement elliptique doit nous conduire à cette loi. Reprenons dans cette vue les équations $d^2x + Xdt^2 = 0$, $d^2y + Ydt^2 = 0$; les signes des forces X et Y sont changés, parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées, en ajoutant les produits respectifs de ces équations par dx et dy, on a $dx.d^2x + dy.d^2y + (Xdx + Ydy)dt^2 = 0$; et comme la première partie est la différentielle de $\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)$, en intégrant, et mettant pour dt sa valeur $\dfrac{xdy - ydx}{c}$, donnée par la loi de la proportionnalité des aires décrites aux tems, on a

$$\frac{c^2(dx^2 + dy^2)}{(xdy - ydx)^2} + 2\int(Xdx + Ydy) = 0.$$

La constante arbitraire est comprise dans le signe $\int$. Transformons, pour plus de facilité, les variables x et y, en coordonnées polaires : et pour cela ayons recours aux formules (3) du n°. 178 dans lesquelles r est le rayon vecteur AM mené par les centres du soleil et de la planète, Fig. 98. u l'angle MAx qu'il forme avec l'axe des x. On trouve $dx^2 + dy^2 = r^2du^2 + dr^2$ et $xdy - ydx = r^2du$. Soit φ la force qui agit sur la planète ; X et Y en sont les composantes; donc $X=\varphi\cos u$, $Y=\varphi\sin u$, et $Xdx+Ydy=\phi dr$. Notre équation est donc changée en

$$\frac{c^2(r^2du^2+dr^2)}{r^4du^2}+2\int\varphi\,dr=0.$$

Si la force φ étoit connue en fonction de r, cette équation feroit connoître la relation en r et u qui appartient à la trajectoire ; mais comme ici cette courbe est donnée, tandis qu'au contraire φ ne l'est point, il faut introduire la relation en r et u qui appartient à l'ellipse, et employer cette équation à déterminer φ. Elle se met sous la forme

$$c^2\left(\frac{dr^2}{r^4du^2}\right)+\frac{c^2}{r^2}+2\int\varphi\,dr=0.$$

En différentiant on obtient

$$\varphi=\frac{c^2}{r^3}-\frac{c^2}{2\,dr}\,d\left(\frac{dr}{r^2du}\right)^2.$$

On a vu (181) que l'équation polaire de l'ellipse est (7)

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(u-\theta)}{a(1-e^2)},$$

e désigne le rapport de l'excentricité au demi grand axe a, θ est l'angle que celui-ci fait avec l'axe des x. Pour introduire cette valeur dans celle de φ, on différentie et on a $\dfrac{dr}{r^2du}=\dfrac{e\sin(u-\theta)}{a(1-e^2)}$; et on en chasse $\sin(u-\theta)$ à l'aide de la précédente qui donne $e\cos(u-\theta)$, dont le carré retranché de e^2 produit

$$e^2\sin^2(u-\theta)=\frac{2a(1-e^2)}{r}-\frac{a^2(1-e^2)^2}{r^2}-(1-e^2),$$

d'où $\left(\frac{dr}{r^2du}\right)^2 = \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)}$.

La différentielle du second membre est . . . .
$-\frac{2\,dr}{a(1-e^2)r^2} + \frac{2\,dr}{r^3}$; la valeur de φ devient donc

$$\varphi = \frac{c^2}{a(1-e^2)} \times \frac{1}{r^2} = \frac{h}{r^2} \ldots\ldots\ldots (l').$$

En faisant la constante $\frac{c^2}{a(1-e^2)} = h$; donc *de ce que les orbites des planètes sont elliptiques, on conclut que la force qui les anime est réciproque au carré de la distance du centre de ces astres à celui du soleil.*

186. L'intensité de la force φ, relativement à chaque planète, dépend du coefficient h; les lois de Képler donnent encore le moyen de le déterminer. En effet, si on nomme T le tems de la révolution d'une planète, l'aire que son rayon vecteur décrit pendant ce tems sera la surface même de l'ellipse planétaire; cette surface est $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{(1-e^2)}$; mais on a, d'après la première loi de Képler $\frac{\frac{1}{2}ct}{\pi a^2 \sqrt{(1-e^2)}} = \frac{t}{T}$, et d'après la troisième, $T^2 = m^2a^3$, m étant un coefficient constant pour toutes les planètes, on a donc $c^2m^2 = 4\pi^2 a(1-e^2)$, d'où

$$h = \frac{c^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2}{m^2},$$

et par conséquent

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{m^2} \times \frac{1}{r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (m').$$

Le coefficient $\frac{4\pi^2}{m^2}$ étant le même pour toutes les planètes, il en résulte que pour chacun de ces corps la force φ est réciproque au carré des distances au centre du soleil, et qu'elle ne varie d'un corps à l'autre qu'à raison de ces distances; d'où il suit qu'elle est la même pour tous ces corps supposés à égale distance du soleil : ainsi les planètes abandonnées à leur gravité vers cet astre, tomberoient dans ce cas en tems égal d'une égale hauteur, en sorte que *leur poids seroit proportionnel à leur masse*.

187. Nous voilà donc conduits par les belles lois de Képler, à regarder le centre du soleil comme le foyer d'une force attractive qui s'étend à l'infini dans tous les sens, en décroissant en raison du carré des distances. La loi de la proportionnalité des aires décrite par les rayons vecteurs, aux tems employés à les décrire, nous montre que la force principale qui sollicite les planètes est constamment dirigée vers le centre du soleil. L'ellipticité des orbes planétaires prouve que pour chaque planète cette force est réciproque au carré de sa distance au soleil; enfin de la proportionnalité des carrés des tems des révolutions aux cubes des grands axes des orbites, il résulte que cette force est la même pour toutes les planètes placées à égales distances du soleil : en sorte que dans ce cas ces corps se précipiteroient vers lui avec la même vîtesse; d'où on conclut que la gravitation est proportionnelle à la masse.

Puisque la loi de l'attraction est connue, on peut obtenir une première approximation du mouvement des corps célestes, en supposant que les masses des planètes sont trop petites et trop éloignées les unes des autres pour s'influencer, ce qui n'est vrai que dans de certaines limites. Cette hypothèse permet de considérer les phénomènes pour chaque planète, comme si elle existoit seule avec le soleil ; et la théorie exposée dans le chapitre précédent, s'applique directement. Seulement chaque planète n'a une orbite connue que lorsqu'on a préalablement déterminé les constantes.

Ainsi soit M la masse du soleil, m celle de la planète. $\frac{M}{r^2}$, $\frac{m}{r^2}$ sont leurs attractions ; chacune tend à attirer l'un des astres vers l'autre : si donc on veut regarder le soleil comme fixe, il faut concevoir la force $\frac{M}{r^2}$ appliquée à la planète en sens contraire : ainsi le mouvement relatif est dû à la somme de ces forces ou $\frac{M+m}{r^2}$: de sorte que $\mu = M + m$, à moins qu'on ne néglige m relativement à M, ce qui suffit pour une première approximation.

Il est en outre nécessaire de connoître, pour chaque planète, sept quantités, que l'on nomme les *Elémens du Mouvement Elliptique*. Cinq de ces élémens, relatifs au mouvement dans l'ellipse, sont 1°. la durée T de la révolution sidérale ; 2°. le demi grand axe a de l'orbite, ou la moyenne distance de la planète au soleil ; 3°. l'excentricité $=e$; 4°. la longitude moyenne de la planète à une époque donnée, afin de déterminer ε ; 5°. la longitude du périhélie à la même époque. Les deux autres élémens se rapportent à la position de l'orbite, et sont 1°. la [illegible] à une époque donnée des nœuds de l'orbite ; 2°. l'inclinaison de l'orbite.

L'[illegible] l'ellipse que nous avons employée [illegible] ne [illegible] pas [illegible] lorsque e est >1 et a négatif, [illegible] est celle d'une hyperbole ; et elle devient enfin celle d'une parabole, lorsque $e = 1$ et $a = \infty$. Quoique ces deux circonstances ne se rencontrent point dans le système céleste, cependant comme les comètes décrivent des orbes à très-peu-près paraboliques, on voit que la loi d'attraction est encore vraie pour ces astres; et leur mouvement est alors déterminé par les formules du n°. 182. Les lois de Képler s'appliquent également aux *Satellites* des planètes, qui ont autour d'elles un mouvement relatif à-peu-près comme si elles étoient immobiles; ces satellites gravitent donc suivant les mêmes lois. Le soleil et les planètes qui ont des satellites, sont par conséquent doués d'une force attractive qui, en décroissant à l'infini réciproquement au carré des distances, embrasse dans sa sphère d'activité tous les corps. L'analogie nous porte à penser qu'une pareille force réside généralement dans toutes les planètes et dans les comètes : mais on peut s'en assurer directement de cette manière. C'est une loi constante de la nature, qu'un corps ne peut agir sur un autre sans en éprouver une réaction égale et contraire; ainsi les planètes et les comètes étant attirées vers le soleil, elles doivent attirer cet astre suivant la même loi. Les satellites attirent par la même raison leurs planètes; cette propriété attractive est donc commune aux planètes, aux comètes et aux satellites, et par conséquent on peut regarder la gravitation des corps célestes les uns vers les autres comme une propriété générale de cet univers.

Nous venons de voir qu'elle suit la raison inverse du carré des distances; à la vérité, cette raison est donnée par les lois du mouvement elliptique, auxquelles les mouvemens célestes ne sont pas rigoureusement assujettis; mais les perturbations résultent de l'action même des forces attractives des planètes et des comètes les unes sur les autres. Consultez à cet égard le chap Ier. du livre II de la *Mécanique céleste*, et l'*Exposition du système du Monde*, ouvrages de M. Laplace, dont nous ne saurions

...mmander la lecture, et dont nous avons extrait t... ...e nous avons dit dans cet article.

...me loi s'observe sur la terre : on s'est assuré, ...xpériences très-précises faites au moyen du pendu... ...), que sans la résistance de l'air, tous les corps se précipiteroient vers son centre avec une égale vitesse : les corps terrestres pèsent donc sur la terre en raison de leurs masses, ainsi que les planètes pèsent vers le soleil, et les satellites vers leurs planètes. Cette conformité de la nature avec elle-même sur la terre et dans l'immensité des cieux, nous montre, de la manière la plus frappante, que la pesanteur observée ici bas n'est qu'un cas particulier d'une loi générale répandue dans l'univers. Les phénomènes célestes, comparés aux lois du mouvement, nous conduisent donc à ce grand principe de la nature, que *les molécules de la matière s'attirent mutuellement en raison des masses, et réciproquement au carré des distances.*

V. *Mouvement d'un corps pesant dans un canal.*

188. Nous avons supposé jusqu'ici que le mobile obéissoit librement à l'action des puissances qui le sollicitoient; supposons maintenant qu'il se trouve assujetti à parcourir une ligne donnée (comme il arriveroit s'il étoit retenu dans un canal), et animé par des forces connues. Mais pour rendre tout ce que nous avons à dire plus facile à saisir, nous allons d'abord traiter le cas où le mobile n'est soumis qu'à la gravité; ce cas, le plus commun dans la nature, mérite un examen particulier à cause de son importance et de sa simplicité.

Fig. 99. 189. Supposons d'abord qu'un corps pesant est placé sur un *Plan incliné AB*; soit *M* le lieu du mobile au bout

du tems t; et $BM = e$ l'espace qu'il a parcouru : enfin soit v sa vîtesse en M. La gravité g imprime pendant le tems dt, dans la direction verticale MD, la vitesse élémentaire gdt; décomposons cette impulsion en deux autres, l'une perpendiculaire au plan et détruite par sa réaction, l'autre $gdt.\cos BMP$ dirigée dans le sens du plan : il est clair que cette dernière aura pour direction la ligne AB de plus grande pente sur le plan, et même que si l'impulsion primitive est dirigée suivant cette ligne, ce sera celle que décrira le corps et suivant laquelle la vîtesse v aura lieu. Nommons ι l'angle BAC que forme le plan incliné avec l'horison : la composante de l'impulsion gdt dans le sens BM est $gdt.\sin \iota$, et on a pour l'accroissement de vîtesse le long du plan $dv = g\sin \iota.dt$. En intégrant on obtient

$$v = V + g\sin \iota.t,\quad e = C + Vt + \tfrac{1}{2}g\sin \iota.t^2 \ldots\ldots (n').$$

Ainsi le point mobile est sollicité par la force accélératrice constante $g \sin \iota$ dans le sens du plan ; on peut regarder ce plan comme vertical, pourvu que cette force remplace la gravité ; *le mouvement est uniformément varié.* V est la vîtesse initiale du corps, et C est sa distance à l'origine des e lorsque $t = 0$. Si on prend le point B de départ pour origine des e, et si on n'imprime aucune impulsion initiale, l'équation du mouvement est donc

$$v = g\sin \iota.t,\quad e = \tfrac{1}{2}g\sin \iota.t^2,$$

la pression du corps sur le plan est $g\cos \iota$.

190. Comparons maintenant le mouvement sur le plan incliné, à celui qui a lieu quand le corps est libre. Comme il descend le long de la verticale BC, on a (156, h), $e' = \frac{1}{2}gt'^2$, $v' = gt'$, et $v'^2 = 2ge'$.

1°. Pour trouver en quel point de BC le mobile doit être parvenu, lorsque le corps M a décrit sur le plan incliné l'espace BM, il faut faire $t=t'$, et éliminer t entre les équations $e=\frac{1}{2}g\sin\iota.t^2$, $e'=\frac{1}{2}gt^2$. On a donc $e=e'\sin\iota$, ce qui indique que e' est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont e est le côté opposé à l'angle ι; ainsi en menant en M la perpendiculaire ME sur AB, on a $BE=e'$, et le point E répond à la question.

Fig. 99 bis. Cette construction fait voir que si on mène dans un cercle $ACDB$ des cordes AC, AD,... par l'extrémité A du diamètre vertical AB; ainsi que BC, BD,... à cause des angles droits en C, D,... *toutes ces cordes seront décrites dans le même tems que le diamètre :* cette propriété s'appelle *Isochronisme* (*).

Fig. 99. 2°. Comme on a $v'^2=2ge'$, et $v^2=2g\sin\iota.e$, pour trouver en quels points de AB et de BC les deux mobiles ont la même vîtesse, il faut faire $v=v'$, ce qui donne $e'=e\sin\iota$. Donc e est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont e' est le côté opposé à l'angle ι; ainsi en menant l'horisontale MF, on voit que $BF=e'$, et que par conséquent lorsque les mobiles sont parvenus en M et en F, ce qui arrive à des instans différens, ils ont la même vîtesse; ou, si on veut, que la vîtesse du corps en M est dirigée dans le sens MA, et due à la hauteur BF. On conclut de là que *plusieurs corps qui parcourent des plans différemment inclinés, et qui, sans impulsion primitive, partent d'un même plan horisontal, ont des vîtesses égales, après avoir décrit sur leurs plans respectifs des parties de même hauteur.* Nous allons voir dans un instant que ce théorême n'est point particulier au plan incliné.

3°. Comparons les tems employés à descendre les longueurs BC et BA terminés à l'horisontale AC; soit

(*) Ἴσος égal, Χρόνος tems.

$BC=e'$ et $BA=e$; comme $e'=\frac{1}{2}gt'^2$ et $e=\frac{1}{2}g\sin\varepsilon.t^2$, on a $\frac{e}{e'}=\frac{\sin\varepsilon.t^2}{t'^2}$. Mais le triangle ABC donne $\sin\varepsilon=\frac{e'}{e}$; donc $\frac{e}{e'}=\frac{BA}{BC}=\frac{t}{t'}$. Ainsi, quelle que soit l'inclinaison du plan, les tems sont proportionnels aux longueurs AB, BC : d'où il suit que *les tems employés à descendre le long de différens plans inclinés, sont entre eux comme les longueurs de ces plans.*

191. Nous avons fait abstraction jusqu'ici du frottement que le corps éprouve en glissant sur le plan ; nous allons maintenant y avoir égard. Coulomb a démontré qu'à moins que la vîtesse ne soit très-grande ou très-petite, le frottement est environ le 10^e. de la pression et ne dépend point de la vîtesse : d'après cela, celle que le corps exerce sur le plan étant $g\cos\varepsilon$, le frottement est dirigé en sens opposé au mouvement et $=fg\cos\varepsilon$, f étant $\frac{1}{10}$ environ (133). Ainsi l'accroissement de vîtesse qui a lieu en M quand le corps descend de B vers A, est $dv=g(\sin\varepsilon-f\cos\varepsilon)dt$, d'où on tire $v=g(\sin\varepsilon-f\cos\varepsilon)t+V$. La constante V est la valeur de v lorsque $t=0$, c'est-à-dire est l'impulsion qu'on suppose avoir été communiquée au corps dans le sens BM, au commencement du tems t.

Si le corps étoit au contraire lancé de A vers B, alors la gravité et le frottement tendroient à diminuer la vîtesse imprimée V, et on auroit $dv=-g(\sin\varepsilon+f\cos\varepsilon)dt$, d'où $v=V-g(\sin\varepsilon+f\cos\varepsilon)t$. De sorte qu'en cumulant ces deux circonstances, on a

$$v=V-g(f\cos\varepsilon\mp\sin\varepsilon)t\ldots\ldots\ldots(o').$$

On en tire aisément pour l'espace parcouru

$$e=Vt-\tfrac{1}{2}g(f\cos\varepsilon\mp\sin\varepsilon)t^2\ldots\ldots\ldots(p').$$

Le signe supérieur a lieu lorsque l'impulsion initiale est donnée de haut en bas ; l'inférieur, de bas en haut.

Dans ce dernier cas, on voit que $v=0$ lorsqu'on a $t=\frac{V}{g(\sin\varepsilon+f\cos\varepsilon)}$, en substituant dans (p'), on a pour la valeur de e correspondante, en faisant $V^2=2gh$ (156), $e=\frac{h}{\sin\varepsilon+f\cos\varepsilon}$. Il est clair qu'alors le corps ne montera le long du plan que jusqu'à un certain point, dont nous venons de déterminer la position ; d'où il redescendra ensuite en partant du repos.

Si $\varepsilon=0$, le plan est horisontal, et on a pour la solution du problême des *Traînaux*, les équations suivantes qui n'ont lieu que jusqu'à ce que la vîtesse d'impulsion soit épuisée.

$$v=V-fgt,\quad e=Vt-\tfrac{1}{2}gft^2.$$

Fig. 100. 192. Cherchons maintenant les circonstances du mouvement d'un corps pesant qui se meut dans un canal curviligne, sans frottement. Supposons qu'un point matériel pesant parte de B, parcourre l'arc de courbe BM, et parvienne en M au bout du tems t. Prenons pour axes l'horisontale Ax et la verticale Ay, de sorte que $AP=x$, $PM=y$, et $BM=s$: soit $BC=k$. La vîtesse v que le mobile a en M dans le sens de l'élément de la courbe est $v=\frac{ds}{dt}$, et la gravité l'augmente de dv dans l'instant dt : mais cette force tend à communiquer la vîtesse gdt dans le sens de MG. Imitons donc ici ce qui a été fait (189), et décomposons cette impulsion en deux autres, dirigées, l'une suivant la normale MN et détruite par la résistance de la courbe ; l'autre suivant la tangente MH et $=gdt.\frac{dy}{ds}$, puisque $\frac{dy}{ds}$ est le cosinus

de l'angle que forme la tangente TM avec l'axe des y. ainsi l'accroissement de vîtesse est $dv = gdt . \frac{dy}{ds}$; d'où $vdv = gdy$. En intégrant on a $v^2 = 2g(y + C)$: or $y = k$ correspond au point B auquel la vîtesse du mobile étoit nulle ou due à la hauteur h (156), suivant qu'il n'a pas reçu ou a reçu une impulsion initiale, ainsi $v = 0$ ou $v^2 = 2gh$, lorsque $y = k$; d'où $C = -k$ ou $= h - k$; donc

$$v^2 = 2g(y - k), \text{ ou } v^2 = 2g(y + h - k) \ldots (q').$$

Dans le premier cas $v^2 = 2g \times MI$, ainsi le mobile a la même vîtesse en M, suivant la tangente, que s'il étoit tombé de la hauteur MI. Donc *lorsqu'un corps pesant descend le long d'une courbe, il a en chaque point la même vîtesse que s'il étoit tombé librement de pareille hauteur, quelle que soit la courbe décrite.* Ce résultat nous apprend que la deuxième conséquence du n°. 190 n'est qu'un cas particulier de ce dernier principe. Voy. 204. Dans le second cas, si l'impulsion a été dirigée de manière à faire monter le corps, $v = 0$ lorsque $y = k - h$; ainsi il doit atteindre un point K tel que $BL = h$.

193. Le théorême précédent servira à faire connoître le mouvement du mobile; en effet, on tire de l'équation (q') $v = \sqrt{\{2g(y - k)\}}$; donc

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\{2g(y-k)\}}, \text{ et } dt = \frac{ds}{\sqrt{\{2g(y-k)\}}} \ldots (r').$$

On tirera de l'équation donnée de la courbe ds en fonction de y et dy; et la substituant ici, on aura, en intégrant depuis $y = h$, le tems employé à descendre de B en M. Lorsqu'il y a une impulsion, il faut mettre $k - h$ pour k.

VI. *Pendule simple.*

Fig. 101. 194. Appliquons ce qui vient d'être dit au cercle : soit un point matériel pesant Q lié à un fil QO, inextensible et sans pesanteur, dont l'extrémité O est fixe, on donne à ce système le nom de PENDULE SIMPLE. Prenons le point le plus bas A pour origine, et la verticale AO pour axe des x ; ainsi $AG=x$, $GM=y$ et $AM=s$, M étant le lieu du mobile au bout du tems t, et Q le point de départ ; $AD=b$, et le rayon $AO=r$. La vîtesse que le mobile a en M dans le sens de la tangente étant due à la hauteur DG, on a $v=\sqrt{(2g\times DG)}$, mais $DG=b-x$; donc on a

$$\frac{-ds}{dt}=\sqrt{\{2g(b-x)\}},\quad \text{d'où}\quad dt=\frac{-ds}{\sqrt{\{2g(b-x)\}}};$$

comme l'arc s décroît lorsque le tems t augmente, nous mettons ici le signe $-$. Cela posé on détermine ds en fonction de x et dx, car l'équation du cercle donne

$$y^2=2rx-x^2,\quad ds=\frac{rdx}{y}=\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}.$$

En substituant, on a donc

$$dt=\frac{-rdx}{\sqrt{\{(2rx-x^2).2g(b-x)\}}}\;\ldots\ldots(1).$$

C'est de l'intégration de cette équation que dépend la connoissance du mouvement du pendule. On doit remarquer avant tout que lorsque le mobile sera arrivé en A, il aura dans le sens horisontal une vîtesse due à la hauteur AD, de sorte qu'il sera dans le même état que si, placé en A, on le tiroit du repos en lui communiquant dans le sens horisontal la vîtesse $\sqrt{\{2g \times AD\}}$. Or on a vu (192) que cette impulsion le fera remonter au point Q', situé sur l'horisontal QD. Ainsi le corps perd peu à peu la vîtesse qu'il a acquise, et il est en Q' dans le même état où il étoit en Q; il doit donc redescendre, et remonter ensuite. On a nommé *Oscillation* cette sorte de mouvement, qui se perpétueroit à l'infini, sans la résistance de l'air et le frottement sur l'axe dont nous faisons ici abstraction.

195. Avant d'intégrer l'équation (1) dans le cas général, il est bon d'examiner le cas où les oscillations sont très-petites : alors x doit être négligé devant r; ce qui donne

$$dt = \frac{-rdx}{\sqrt{\{2rx.2g(b-x)\}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \times \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}.$$

Mais (160) on a $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{2x-b}{b}\right) = \pi$ lorsqu'on intègre depuis $x=b$ jusqu'à $x=0$; on obtient donc $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$ pour le tems de la demi-oscillation, et pour le tems T de l'oscillation entière

$$T = \pi.\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (s').$$

On observera que l'intégrale $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ est aussi bien 3π, 5π,... que π; puisque tous ces arcs ont également -1 pour cosinus : ce qui fait voir que le mobile arrive en A, dans une infinité de tems successifs, tous séparés entre eux par le tems $\pi.\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$ qui est celui de l'oscillation entière. Cela répond aux oscillations successives,

n l'a déjà dit. On tire de l'équation (s') diverses
ces remarquables.

mme le tems T est indépendant de b, on voit
le que soit l'amplitude de l'excursion $Q'AQ$, le
tems oscillation est le même, pourvu qu'elle soit très-
nsi des mobiles placés en divers points de l'arc
artant du repos, arriveront tous en même tems
en A. On dit alors que les oscillations sont *Isochrones* (190).
Nous reviendrons bientôt sur cette propriété (198, 2°.).

2°. Soient r et r' les longueurs de deux pendules, les tems T et T' de leurs oscillations donneront $\frac{T}{T'} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r'}}$. Ainsi *les durées des oscillations sont entre elles comme les racines carrées des longueurs des pendules.*

3°. Si pendant le tems t un pendule fait N oscillations, la durée de l'une d'elles est $= \frac{t}{N}$; et on a........ $\frac{t}{N} = \pi . \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$, d'où $r = \frac{g}{\pi^2} . \frac{t^2}{N^2}$: un autre pendule de longueur r' feroit N' oscillations dans le même tems t, donc $r'N'^2 = rN^2$. Ainsi *les longueurs de deux pendules sont entre elles en raison inverse, des carrés des nombres d'oscillations, faites dans le même tems.* L'équation précédente donnera l'une des quatre quantités r, N, r' et N' lorsqu'on connoîtra les trois autres.

Ainsi pour déterminer la longueur r du pendule qui bat les secondes, on en fera osciller un de longueur arbitraire r', et on comptera le nombre N' d'oscillations qu'il fait dans un tems déterminé, tel qu'une minute, ce qui donnera r. C'est ainsi que, par exemple, on verra qu'un pendule de 5 pieds de long fait 48,5 oscillations par minute. On a donc alors $r' = 5$ pieds, $N' = 48,5$ et $N = 60$; on en conclut que la longueur du pendule à seconde est de 0,742 mètres ou de $3^{\text{pi}}\,8^{\text{li}},57 = 9{,}94$ décimètres, suivant qu'on divise le jour en 100 000 ou en 86 400 parties, c'est-à-dire suivant qu'il s'agit de la nouvelle ou de l'ancienne mesure du tems : mais on ne doit point oublier que cette longueur varie dans les différens lieux de la terre, tant à cause du défaut de sphéricité, que par l'effet de la force centrifuge (210).

4°. Puisqu'on a $g = \dfrac{\pi^2 r N^2}{t^2}$, on peut donc déterminer avec la plus grande exactitude la valeur numérique de la gravité g, à l'aide d'une expérience qui feroit connoître les grandeurs N et t pour un pendule de longueur connue r. Nous avons donné cette valeur (156, g).

196. Reprenons maintenant l'équation (1), et examinons ce qui arrive lorsque les excursions du pendule sont de grandeurs quelconques. Pour intégrer nous diviserons et multiplierons respectivement par $2rx$ les facteurs sous le radical, ce qui donne

$$t = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \times \int \left\{ \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{x}{2r}\right)}} \right\};$$

développant $\left(1-\dfrac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$, afin d'obtenir une suite convergente, on a

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \times \int \left\{ \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} \left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2r} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4r^2} + \text{etc.} \right] \right\}$$

On observe que les termes à intégrer sont tous de la forme $\dfrac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, et que de plus pour obtenir le tems de la demi-oscillation, l'intégrale doit être prise entre les limites $x = b$, et $x = 0$. Or les formules connues (*Cal. int.*

$$\ldots \tfrac{1}{2} b . \frac{2m-1}{m} \times \int \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$$

[illegible] paroit soit que $x = b$, soit qu[illegible]

$$\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = U_{(m)},$$ on aura

$$= \tfrac{1}{2} b . \frac{2m-1}{m} . U_{(m-1)},$$

$$U_{(m-1)} = \tfrac{1}{2} b . \frac{2m-3}{m-1} . U_{(m-2)},\ \text{etc.}\ldots$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{2x-b}{b}\right) = \pi.$$

Multipliant ces équations entre elles, et réduisant, on a

$$\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = (\tfrac{1}{2} b)^m . \pi . \frac{1.3.5\ldots(2m-3)(2m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

En attribuant successivement à m les valeurs 0. 1, 2. 3...
et substituant les résultats, on obtient

$$[\text{illegible}] \times \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{b}{2r} \ldots + \left(\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}\right)^2 \frac{b^m}{2^m r} + \text{etc.}\right\}$$

Comme b est le sinus verse de l'angle QOA, lorsque cet angle est très-petit, la formule précédente se réduit à la valeur [illegible] n°. 105.

10[illegible]. Le mobile passe de Q en A par différens degrés de vitesse qu'il est important de connoître. Pour cela désignons par s la *vitesse angulaire*, c'est-à-dire la vitesse du point de la ligne MO qui est distant de O de l'unité : les circonférences étant entre elles comme leurs rayons, les

ints qui les décrivent sont dans le même rap-
ı) la vîtesse du point M est $r\nu$, et on a (192)
: DG) : or $DG = OG - OD$, et les triangles
) donnent $OG = r.\cos\theta$, $OD = r.\cos f$,

$$/ \left\{ \frac{2g}{r} (\cos\theta - \cos f) \right\} \ldots\ldots\ldots (t').$$

Propriétés mécaniques de la Cycloïde.

ıs-nous de la formule (r') pour trouver le Fig. 34.
oieroit un corps pesant, placé en M, sans
iale, pour descendre au point A le plus bas,
cloïde MA, dont l'axe CC' est horisontal.
nètre BA du cercle générateur, nous avons
équation de la cycloïde est $s^2 = 4ay$, en
pour axe des y, et le point A pour origine;
$= \sqrt{a}.\frac{dy}{\sqrt{y}}$; et comme, en supposant
n a pour la vîtesse du mobile en O,
$) = \sqrt{(2g(h-y))} = \frac{-ds}{dt}$, on en tire

$$\frac{-ds}{\sqrt{(h-y)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)} \times \frac{-dy}{\sqrt{(hy-y^2)}},$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}.\mathrm{arc}\left(\cos = \frac{2y-h}{h}\right) + C,$$

t l'intégrale depuis $y = h$, jusqu'à $y = o$,

$$/\left(\frac{2a}{g}\right).$$

là deux conséquences remarquables.
ıleur est la même que nous avons déja trouvée
de la demi-oscillation (195) dans un arc de

cercle très-petit, en supposant toutefois $2a = r$; c'est-à-dire que le cercle doit avoir $2 \times AB$ pour rayon. Cela vient de ce que le cercle osculateur de la cycloïde au point A, a pour rayon $2a$, et se confond avec cette courbe pendant un petit arc : on peut donc supposer que ce cercle est, dans cet espace, la courbe que le corps pesant décrit.

2°. La quantité h n'entrant point dans la valeur du tems t, il s'ensuit que le tems employé à arriver au point A seroit le même, quel que fût le point de départ M. Cette propriété de la cycloïde n'appartient au cercle dans les arcs très-petits, que parce que ces courbes sont osculatrices. On a donné à cette propriété dont jouit la cycloïde le nom de *Tautochronisme* (*).

Après avoir reconnu que la cycloïde étoit Tautochrone, HUYGHENS, à qui on doit l'application du pendule aux horloges, imagina de leur donner pour régulateur un pendule à oscillations cycloïdales : voici comment il en conçut l'exécution. On sait que la cycloïde a pour développée une autre cycloïde égale, mais disposée en sens différent (*Cal. différ.*, Lacroix, 103). Supposons donc qu'on a courbé deux lames AC et AD, sous la forme de deux arcs de cycloïde égaux, qui auroient pour sommet commun le point A de suspension d'un pendule. Il est clair que le fil en se courbant successivement sur chacune des deux lames, feroit décrire au mobile un arc de cycloïde, quelle que fût l'excursion qu'il seroit contraint à faire. Mais cette théorie est plus ingénieuse qu'utile; car comment donner et conserver aux lames la forme cycloïdale? On se sert avec plus d'avantage des pendules à petites oscillations; leur mouvement est également isochrone, et n'a pas les mêmes inconvéniens.

Fig. 102.

(*) Ταὐτὸ, même, Χρόνος, tems.

199. Après avoir reconnu que la cycloïde est tautochrone dans le vide, il convient de s'assurer si elle jouit seule de cette propriété. Prenons l'origine des coordonnées au point le plus bas où la tangente est horisontale, comptons les y verticalement; nommons s l'arc qui reste à décrire, et S l'arc entier. La composante de la gravité suivant l'arc s de la courbe est $-g\dfrac{dy}{ds}$: si l'équation de cette courbe étoit donnée $\dfrac{dy}{ds}$ seroit une fonction connue de s; on peut donc supposer $\dfrac{dy}{ds}=Ms^{\alpha}+Ns^{\beta}+$ etc., α, β.... étant des exposans croissans et positifs, puisque $g\dfrac{dy}{ds}$ doit être nul lorsque $s=0$; M, N...: sont des coefficiens indépendans de S. Concevons maintenant la courbe rectifiée, car la vitesse n'est point changée par la courbe (voyez 204, 1°.) Fig. 93. B l'origine, D le point de départ, $BD=S$, $BN=s$, et le mobile soumis en N à la force $-g\dfrac{dy}{ds}$, on a donc

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-gMs^{\alpha}-gNs^{\beta}-\text{etc.}$$

Il s'agit d'intégrer cette équation depuis $s=S$ jusqu'à $s=0$, et on devra obtenir une valeur de t indépendante de S. On multiplie par ds, on intègre, et comme la vitesse est nulle en D où $s=S$, on trouve

$$\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{2gM}{\alpha+1}(S^{\alpha+1}-s^{\alpha+1})+\frac{2gN}{\beta+1}(S^{\beta+1}-s^{\beta+1})+\text{etc.}$$

Pour dégager les divers termes de S, faisons $s=Su$, ils seront tous de la forme $\dfrac{2gM}{\alpha+1}S^{\alpha-1}(1-u^{\alpha-1})$, le premier membre étant $\frac{d\omega^2}{dt^2}$. Or les limites de l'intégration qui reste à effectuer étant $\omega = 1$ et $\omega = 0$, qui ne contiennent pas S, elle ne peut faire disparoître S, à moins que l'un des termes n'en soit indépendant et les autres nuls; ainsi $\alpha = 1$ et $N = 0$....Ce résultat n'est vrai qu'autant que la force accélératrice est indépendante de la vitesse, car M, N..... seroient des fonctions de S.

On a donc $\frac{dy}{ds} = Ms$ ou $\frac{d^2s}{dt^2} = -gMs$; ce qui montre que pour que la courbe soit tautochrone, il est nécessaire et il suffit que, pour chaque instant, la composante de la gravité dans le sens de la tangente, soit proportionnelle à l'arc qui reste à décrire pour arriver au point le plus bas. Pour trouver l'équation de la courbe, il faut intégrer $\frac{dy}{ds} = Ms$, ce qui donne $y = \frac{1}{2} Ms^2$, et éliminer s entre ces deux équations : comme en général cette courbe est à double courbure, on obtient, en faisant

$\frac{1}{2M} = A$,

$$A\frac{dy^2}{y} = ds^2, \text{ ou } A\frac{dy^2}{y} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En sorte que si une relation entre les trois variables x, y et z satisfait à cette équation, la courbe à laquelle elle appartiendra sera tautochrone, et réciproquement. Or une seule relation entre trois coordonnées ne suffit pas pour déterminer une courbe : si elle étoit intégrable (et par conséquent décomposable en deux facteurs du premier degré), elle donneroit une surface courbe qui seroit le lieu de toutes les tautochrones, c'est-à-dire que toutes les courbes qu'on pourroit tracer sur cette surface jouiroient de la propriété du tautochronisme. Mais comme cette équation n'appartient pas à une surface courbe, elle est du nombre de celles qu'on regardoit autrefois comme absurdes, et que MONGE a démontrées appartenir à une infinité de courbes à double courbure, jouissant d'une propriété commune (*Cal. int.*, Lacroix, 308).

S'il faut que la courbe soit dans un plan, on pourra toujours le supposer passer par l'axe des x. Alors, pour rapporter la courbe à des coordonnées x' et y' prises dans le plan, on fera $x=x'$, $z=y'\cos\theta$ et $y=y'\sin\theta$, θ étant l'angle que le plan fait avec celui des xz, ce qui donne $A\sin\theta.\dfrac{dy'^2}{y'}=dx'^2+dy'^2=ds^2$, d'où on tire (198), $s^2=4Ay'\sin\theta$ qui est l'équation de la *cycloïde* : si le plan est vertical $\sin\theta=1$.

Il résulte de là qu'*il y a une infinité de Tautochrones à double courbure, et une seule Tautochrone plane, qui est la cycloïde, verticale ou inclinée.*

200. Si on veut que la tautochrone soit tracée sur un cylindre vertical à base quelconque, ou, ce qui revient au même, si on se donne l'équation sur le plan horisontal de cette base qui est la projection de la tautochrone; l'élément de l'arc de la base sera $d\mu^2=dx^2+dz^2$, ce qui change notre équation différentielle en $A\dfrac{dy^2}{y}=dy^2+d\mu^2$.

Or il suit de ce qu'on vient de dire, que cette équation est celle d'une cycloïde qui a l'arc μ pour abscisse, comptée sur la base cylindrique; donc si on trace sur un plan une cycloïde, et qu'on la courbe sur un cylindre vertical à base quelconque, en mettant l'origine au point le plus bas, on aura une tautochrone à double courbure.

201. Le tems qu'un mobile emploie à parcourir la corde *DB* d'un cercle *ACB*, est le même (190, 1°) que celui Fig. 99 *bis*.

la plus inclinée, arrivant en M avec une vitesse due à la hauteur CP, parcourt l'arc Mm dans le moindre temps possible.

Faisons $CP = x$, $PM = y$, $CM = z$; la vitesse en M sera $\sqrt{2gx}$, et le temps employé à parcourir $Mm = dz$ sera $dt = \frac{dz}{\sqrt{2gx}}$. En faisant pareillement Cp ou $x + dx = x'$, pm ou $y + dy = y'$, $Cm = z + dz = z'$, on aura, pour le temps employé à parcourir mm',

$\frac{ds'}{\sqrt{(2gx')}}$: le tems nécessaire pour descendre de M en m', devant être un *minimum*, on aura donc

$$\delta\left\{\frac{ds}{\sqrt{(2gx)}}+\frac{ds'}{\sqrt{(2gx')}}\right\}=0.$$

Nous employons le signe δ, pour distinguer la *variation* qui a lieu ici, et qui se rapporte au passage d'un point de la courbe à un point d'une autre courbe, de celle qu'on désigne communément par la lettre d, et qui provient de la considération de deux points pris sur la même courbe. Or il y a ici des grandeurs constantes qu'il est facile de reconnoître; telles sont g, x, x', puisqu'elles ne dépendent pas de la considération qui vient d'être exposée pour établir les variations. On a donc......... $\frac{\delta.ds}{\sqrt{x}}+\frac{\delta.ds'}{\sqrt{x'}}=0$. Cela posé, à cause de $\delta.dx=0$, on a $\delta.ds=\frac{dy}{ds}\delta.dy$; et aussi $\delta.ds'=\frac{dy'}{ds'}\delta.dy'$; donc $\frac{dy\,\delta.dy}{ds\sqrt{x}}+\frac{dy'\delta.dy'}{ds'\sqrt{x'}}=0$. Or, soit qu'il s'agisse de l'arc Mmm', ou de l'arc Mnm', l'ordonnée pm ou pn devient toujours $p'm'$, donc $dy+dy'$ est une grandeur constante; d'où on tire $\delta(dy+dy')=0$, ou $\delta.dy=-\delta.dy'$: et

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}}-\frac{dy'}{ds'\sqrt{x'}}=0.$$

Il est aisé de voir que le deuxième terme de cette équation n'est autre que le premier, dans lequel on a augmenté chaque variable de son accroissement; cette équation équivaut donc à $d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\right)=0$, ou $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}=A$. Or

$\frac{dy}{ds}$ est le sinus de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des abscisses ; au point où cette tangente est horisontale, cet angle est droit, et on a $\frac{dy}{ds} = 1$: soit a l'abscisse inconnue de ce point, on a $A = \frac{1}{\sqrt{a}}$, d'où $\frac{dy}{ds} = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$; or $ds^2 = dx^2 + dy^2$, donc $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{x}{a-x}\right)}$, équation qui appartient à une cycloïde (67) dont l'axe des x est vertical, et qui a le diamètre de son cercle générateur $= a$; ainsi *la courbe de plus vîte descente est une cycloïde.*

Fig. 104. Pour construire cette courbe, il suffit de trouver le diamètre a du cercle générateur ; comme on connoît l'abscisse et l'ordonnée du point R où le mobile doit parvenir, on mettra ces valeurs dans l'équation précédente après l'avoir intégrée, et on en déduira la valeur de a. On peut aussi employer une construction fort simple : A et R étant les deux points donnés, on mènera la droite AR, on tracera sur la base horisontale AF une cycloïde quelconque AKL, et par le point K de rencontre de cette courbe avec AR, on mènera à l'extrémité L de son axe la droite KL ; la parallèle RF à KL déterminera le point F qui donnera AF pour l'axe de la cycloïde cherchée, c'est-à-dire que AF sera égal à la circonférence du cercle générateur, ou $AF = 2\pi a$. Cette construction est fondée sur ce que toutes les cycloïdes sont des courbes semblables, puisqu'il n'entre dans leur équation qu'une seule constante, qui est le diamètre du cercle générateur. On voit aussi que pour deux points donnés A et R, il n'y a qu'une seule cycloïde qui puisse remplir les conditions du problême de la brachystochrone. V. le *Cal. des Var.* à la fin de ce Traité.

VIII. *Du mouvement d'un point assujetti à parcourir une courbe plane.*

202. Jusqu'ici nous n'avons considéré d'autre mouvement sur une courbe que celui qui est produit par la gravité : il est important maintenant de généraliser notre théorie et de l'étendre à des forces quelconques. Pour cela, observons qu'un mobile ne peut être ainsi contraint dans son mouvement, sans qu'il exerce continuellement une pression sur la courbe qu'il décrit : cette pression est d'ailleurs normale à cette courbe; car autrement elle pourroit se décomposer en deux (48 et 95), l'une normale et détruite, l'autre tangente et en vertu de laquelle le point n'auroit pas d'action sur la courbe, ce qui est contre l'hypothèse. Employons les procédés qui nous ont déja été utiles (136), pour ramener le mobile à l'état de liberté où il doit être pour que les équations (b', c') soient applicables; concevons, au lieu de la réaction de la courbe, une force normale N, (et par conséquent variable d'un point à l'autre de grandeur et de direction) et qui soit sans cesse égale et opposée à la pression; et supposons que cette force agisse d'une manière active, avec celles du système réduites à deux X et Y, (166). Il est clair que détruisant sans cesse la pression du mobile, elle le met dans le même état que s'il étoit libre : et la courbe qu'il décrit, peut être considérée comme une trajectoire ordinaire.

203. Soit BMZ la courbe plane que le mobile est assujetti à décrire : X et Y sont les forces parallèles aux axes Ax et Ay; le corps est supposé en M au bout du tems t; $BM = s$, $AP = x$, $PM = y$; enfin N est la force normale dont nous venons de parler. On sait que $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$ Fig. 105.

sont les cosinus des angles que forme la normale avec les axes des x et des y, ainsi les composantes de N dans le sens de ces axes sont $-N\frac{dy}{ds}$, et $N\frac{dx}{ds}$ (*); la première est ici négative, parce qu'elle tend à diminuer les x : ainsi

(*) La force N agit suivant la normale, mais on ne connoît pas d'avance dans quel sens; nous supposons ici qu'*elle tend à éloigner le mobile du centre de courbure*. Or, cela est indifférent pour l'analyse dont l'un des plus précieux avantages est de donner non-seulement les forces inconnues, mais encore le sens suivant lequel elles agissent. Si donc, pour un instant, et au lieu déterminé du corps, la formule (v') donnoit pour N une valeur numérique négative, on reconnoîtroit que la force agit dans un sens opposé à celui qu'on lui attribue ici, c'est-à-dire tend vers le centre de courbure.

Ce qu'il importe sur-tout de remarquer, c'est que les deux composantes de N sont essentiellement de signes contraires : en effet, on doit supposer que la courbe est donnée par son équation, et que $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$ doivent être employés dans le calcul avec les signes qui leur appartiennent et qui dépendent de la forme de cette courbe. Dailleurs la force N ne peut avoir que quatre dispositions possibles, suivant que l'angle que la normale fait avec l'axe des x est aigu ou obtus et suivant que la courbe présente à cet axe sa concavité ou sa convexité. Ainsi, ou l'une des deux composantes de N tendra à augmenter et l'autre à diminuer les x et y, ou le contraire aura lieu : or, dans le premier cas, x, y et s croissent ensemble, donc $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$ seront positifs; tandis que, dans le second cas, ces rapports différentiels ont des signes contraires : il suffira, pour s'en convaincre, d'examiner tour-à-tour les quatre dispositions que peut avoir la force N, et de supposer qu'elle tend à éloigner du centre de courbure.

le mobile peut être considéré comme libre et animé par les forces $X - N\frac{dy}{ds}$ et $Y + N\frac{dx}{ds}$; et les équations (b', c') deviennent, suivant qu'on a dt constant ou variable,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = X - N.\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N.\frac{dx}{ds} \\ d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(X - N\frac{dy}{ds}\right)dt, \; d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(Y + N.\frac{dx}{ds}\right)dt \end{array}\right\} \ldots (u').$$

Telles sont les équations du mouvement : et on voit que si on leur joint l'équation du canal que le mobile est assujetti à décrire, on aura trois relations entre les quatre variables x, y, t et N; de sorte qu'à l'aide de l'intégration et de l'élimination, on obtiendra des équations entre deux d'entre elles. C'est ce que nous allons développer et appliquer à des exemples.

204. Pour trouver la valeur de la vitesse, employons le procédé du n°. 168. Multiplions la première de nos équations par dx, la seconde par dy, et ajoutons : ce calcul fait disparoître les termes qui renferment N; et on a encore ici, comme précédemment, $v^2 = A + 2\int(Xdx + Ydy)$, ou $v^2 = A + 2\chi$, ce qui donne la même valeur de v, et nous fournit plusieurs conséquences importantes.

1°. La valeur de la constante A dépend de celles de v et χ à un instant déterminé : marquons d'un trait les variables pour désigner leurs valeurs à cet instant, en faisant $v = v'$ et $\chi = \chi'$ on trouve $A = v'^2 - 2\chi'$; ainsi la vitesse v en un second point est donnée par $v^2 = v'^2 + 2(\chi - \chi')$: or χ et χ' ne dépendent que des coordonnées des points extrêmes; ainsi la vitesse au second instant est donnée par la vitesse au premier et par la position de ces points; d'où on conclut qu'en général *la vitesse ne dépend nullement de la forme de la courbe décrite, mais seulement* *des positions respectives des points de départ et d'arrivée;* de sorte que si le corps étoit assujetti à décrire une autre courbe quelconque, passant par ces deux mêmes points, il auroit encore la même vitesse. Cela revient à dire que *la pression qu'exerce le mobile sur la courbe qu'il est contraint de décrire, ne diminue rien de sa vitesse* (*).

2°. Si le mobile n'est soumis à l'action d'aucune force continue, son mouvement ne peut provenir que d'une impulsion primitive; et sa vitesse, d'après ce qu'on vient de voir, doit rester toujours la même. On voit en effet que $X=0$, et $Y=0$, donnent $v^2=A$.

3°. Le cas de la gravité est renfermé dans ce qu'on Fig. 100. vient de dire; si cette force agit seule, on a $X=0$, et $Y=g$, en comptant les y positifs verticalement de haut en bas: ainsi $v^2=A+2gy$. Soit B le point de départ, en ne supposant aucune vitesse initiale, et faisant $y=BC=k$, on a $v=0$; ainsi $A=-2gk$, et $v^2=2g(y-k)=2g\times MI$: ce qui donne de nouveau le théorême (192).

205. La pression que le mobile exerce sur la courbe est égale et opposée à la force N; pour la déterminer, prenons dt variable et dx constant; en exécutant les différen-

---

Fig. 106. (*) Cette conséquence peut être démontrée immédiatement. En effet, lorsqu'un mobile dénué de tout ressort, lancé dans la direction FE avec la vitesse V, représentée par FE, rencontre un plan BH, cette vitesse est décomposée en deux autres BE et EI: celle-ci est détruite par le plan; la première a son entier effet, de sorte que le corps glisse le long de BH avec la vitesse BE, il a donc perdu la vitesse $FE-BE=V-V.\cos\theta$, en nommant θ l'angle FEB. Cela posé, on voit que la vitesse perdue étant $V.\sin.\text{ver}.\theta$, lorsque le corps décrira une courbe, il perdra, en passant d'un élément à l'autre, une vitesse proportionnelle à un sinus verse, et par conséquent à un infiniment petit du second ordre; de sorte que la vitesse perdue ne sera finie que lorsque l'arc décrit sera infini.

tiations, les formules (u') deviennent

$$-\frac{dx}{dt^3}.d^2t = X - N.\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dt.d^2y - dy.d^2t}{dt^3} = Y + N.\frac{dx}{ds}.$$

Eliminons d^2t entre ces équations ; pour cela multiplions la première par dy, la seconde par dx, et retranchons ; nous aurons, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2$,

$$\frac{dx.d^2y}{dt^2} = Ydx - Xdy + N\left(\frac{dx^2 + dy^2}{ds}\right) = Ydx - Xdy + Nds.$$

On pourroit aisément tirer de là la valeur de N en fonction des quantités connues X et Y, et des différentielles qui dépendent de la courbe donnée que décrit le mobile : mais cette formule est plus simple, lorsqu'on y introduit le rayon de courbure R ; car on sait que $R = \frac{ds^3}{dx.d^2y}$; mettant dans l'équation précédente pour $dx.d^2y$ sa valeur $\frac{ds^3}{R}$, on en déduit aisément

$$N = \frac{v^2}{R} + \frac{Xdy - Ydx}{ds} \ldots\ldots\ldots (v').$$

206. Ainsi lorsqu'un point matériel sera assujetti à parcourir une courbe, dont on connoîtra l'équation $y = fx$, on substituera dans l'équation (d', 168) pour X, Y, y et dy leurs valeurs en fonction de x, et on en déduira la valeur de v ; à l'aide de laquelle, et par une semblable substitution dans la formule précédente, on obtiendra N : revenant ensuite aux équations (u') on aura, après les intégrations convenables, la vîtesse dans le sens de chaque axe, et le lieu du mobile au bout du tems t.

Pour faire l'application de cette théorie à un exemple simple, cherchons les circonstances du mouvement d'un corps pesant sur la droite AB, formant avec l'horizon l'angle ε. Prenons le point A pour origine, B le point de départ, $BC = h$, et comptons les y verticalement : l'équation de la droite AB est $y = x.\tang \varepsilon$; de plus on a $X = 0$, $Y = g$, et

$$dy = dx.\tang \varepsilon,\ d^2y = 0,\ \frac{dx}{ds} = \cos \varepsilon,\ \frac{dy}{ds} = \sin \varepsilon.$$

On en conclut 1°. $v^2 = A - 2gy = 2g(h - y)$, (204, 3°).

2°. $K = 0$, ce qui change (v') en $N = g \cos \varepsilon$.

3°. Les équations (u') deviennent

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -g \cos \varepsilon \sin \varepsilon\, dt,\quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g \sin^2 \varepsilon\, dt;$$

ainsi les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ dans le sens des x, des y et de BA sont $gt \cos \varepsilon \sin \varepsilon + D$, $gt \sin^2 \varepsilon + E$ et $gt \sin \varepsilon + C$.

4°. On a enfin pour l'espace parcouru au bout du temps t, de B vers A, $s = \frac{1}{2} gt^2 \sin \varepsilon + Ct + C'$.

On peut remarquer l'accord qui existe entre tout ce qui vient d'être dit, et ce qu'on a vu (189).

207. L'équation (v') fait voir que la pression $-N$ qu'un point matériel exerce sur une courbe qu'il est assujetti à décrire, se compose de deux parties qui sont dues, l'une à la vitesse actuelle de ce corps, l'autre aux forces accélératrices qui le sollicitent : celle-ci est la somme des composantes $-X.\frac{dy}{ds}$, $Y.\frac{dx}{ds}$ de ces forces dans le sens de la normale. Il pourroit arriver que le corps ne fût soumis à l'action d'aucune force accélératrice; son mouvement ne seroit alors dû qu'à une impulsion primitive, et seroit uniforme (204, 2°.); la pression se réduiroit à la

première partie, et h étant la hauteur due à la vîtesse v, on auroit

$$N = \frac{v^2}{R} \quad \text{ou } N = \frac{2gh}{R} \ldots\ldots\ldots (x')$$

N est ici ce qu'on nomme la *Force Centrifuge* : cette force est donc *la partie de la pression qui dépend uniquement de la vîtesse;* et lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices, elle est la pression même. En général elle varie à chaque instant; cependant elle devient constante lorsque dans ce dernier cas le corps doit décrire la circonférence d'un cercle; car v et R sont constans. Le nom de force centrifuge vient de ce que le mobile tendant par son inertie à se mouvoir en ligne droite, il ne peut être contraint à décrire une courbe sans faire un effort continuel pour s'échapper par la tangente, et s'éloigner du centre de son mouvement (*).

(*) On peut démontrer la formule (v') en parvenant directement à la valeur de la force centrifuge. Soit AdE la circonférence qu'un point matériel décrit en vertu d'une impulsion; sa vîtesse v sera constante : soit A le lieu du mobile à un instant quelconque; s'il devenoit tout-à-coup libre, il parcourroit la tangente AT uniformément; et pendant l'instant dt, il décriroit l'espace $Af = vdt$. Mais la force centrale N qui ramène le point dans le cercle, faisant parcourir pendant le tems dt l'espace Ab, le mobile devra décrire la diagonale Ad du parallélogramme fb, et le point d devra être sur la circonférence. Or, on a... $(bd)^2 = Ab \times bE$ ou $v^2dt^2 = 2R \times Ab$, parce que bE équivaut à $2 \times AB = 2R$. Mais la force accélératrice N, supposée constante pendant le tems dt, feroit parcourir (154) l'espace ... $\frac{1}{2} Ndt^2 = Ab$; on a donc $v^2 = R \times N$, d'où $N = \frac{v^2}{R}$. Fig. 107.

S'il s'agissoit d'une courbe quelconque parcourue en vertu d'une impulsion, cette formule auroit encore lieu, R y désignant

Fig. 100. 268. Si le mobile n'est soumis qu'à la force accélératrice de la pesanteur, soit DZ la courbe plane qu'il est assujetti à décrire; MP vertical et $=y$, $AP=x$; on a alors $X=0$ et $Y=g$, la valeur de la pression, qui est opposée à la force N, devient $\frac{v^2}{R}+g.\frac{dx}{ds}$. En supposant la vitesse en A due à la hauteur h, on aura (192).....
$v^2=2g(h+y)$, et la pression $=\frac{2g(h+y)}{R}+g\frac{dx}{ds}$.

Pour trouver la courbe sur laquelle la pression est la même pour tous les points, il faut donc égaler à une constante, et intégrer. On a $2(h+y)\,d^2x+dx\,dy=C\,dy\,ds$; car le rayon de courbure pris dans l'hypothèse de ds constant, est $R=\frac{dy\,ds}{d^2x}$. Le facteur $\frac{1}{2}(h+y)^{-\frac{1}{2}}$ étant intégrable, et comme ds est constant, on a (en intégrant par parties)

$$[C\sqrt{(h+y)}+A]\,ds=\sqrt{(h+y)}\,dx.....(1).$$

Comme en général $\frac{dx}{ds}$ est le sinus de l'angle que la courbe fait en un point quelconque avec la verticale, et qu'on connoît en un point D ou B la valeur de ce sinus; cela sert

---

le rayon du cercle osculateur; car à chaque instant le corps peut être supposé parcourir ce cercle.

Enfin, si le corps est soumis à l'action de forces accélératrices, sa vitesse étant v au bout du tems t, si ces forces cessoient tout-à-coup leur action, la pression sur la courbe seroit $=\frac{v^2}{R}$; cette pression doit d'ailleurs être augmentée de la somme des composantes $-\frac{Xdy}{ds}$ et $\frac{Ydx}{ds}$ des forces accélératrices X et Y dans le sens de la normale, et on retrouve l'équation (v') parce que la force N est égale et opposée à la pression.

à déterminer la constante A que nous regarderons comme connue. En carrant et mettant pour ds^2 sa valeur $dx^2 + dy^2$, on trouve une équation très-facile à séparer, de sorte que l'intégration n'offre plus de difficultés.

Si la vîtesse initiale étoit nulle, on auroit $h = 0$, d'où on tireroit $Cds = dx$; donc $(1 - C^2)\,dx^2 = C^2 dy^2$; d'où $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{(1 - C^2)}}$; les constantes sont nulles, parce que $x = 0$ donne $y = 0$. Ainsi *la courbe d'égale pression est* ici une droite qui fait avec la verticale un angle dont le sinus est $= C$; il faut que l'on ait $C < 1$.

209. Si dans (x') on fait $h = \frac{1}{2} R$, on a $N = g$, et la force centrifuge devient égale à la pesanteur g : ainsi un corps pesant attaché à l'une des extrémités d'un fil fixé par son autre extrémité, tendroit ce fil avec la même force, s'il étoit suspendu verticalement, que si on le faisoit mouvoir sur un plan horisontal avec la vîtesse qu'il acquerroit, en tombant d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du fil.

L'équation (x') donne la théorie des *frondes*, v étant la vîtesse d'impulsion, R la longueur constante du fil, et N sa tension.

210. Comme la terre a un mouvement de rotation autour de son axe, toutes ses parties sont animées d'un certain degré de force centrifuge, lequel est plus ou moins grand, selon qu'elles sont plus ou moins éloignées de l'axe. Sous l'équateur, les points sont à la plus grande distance de l'axe; cette force, directement opposée à celle de la pesanteur, doit donc la diminuer davantage qu'en tout autre lieu; et quant aux parties intermédiaires entre les pôles et l'équateur, la diminution de la pesanteur doit être moins sensible, à mesure qu'elles sont plus près des pôles. Au pôle,

la force centrifuge est nulle, et les corps ont le même poids que si la terre étoit immobile.

Comme la gravité doit être normale à la surface des eaux, et qu'elle est la résultante de l'attraction terrestre et de la force centrifuge, on voit qu'elle doit varier avec les lieux, et que si la terre a été fluide dans l'origine, elle n'a pu conserver, en vertu de son mouvement de rotation, la forme sphérique; elle a donc dû prendre la figure d'un sphéroïde applati, qu'on démontre être engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe. C'est aussi ce que l'expérience confirme, car l'aplatissement vers les pôles rend l'axe de $\frac{1}{335}$ moindre que le diamètre de l'équateur. *Géod Puissant* 75, *Méc. cél.* tom. II, p. 145.

A l'équateur, les corps décrivent dans chaque seconde décimale un arc de $4^m,1095$ de la circonférence de l'équateur, dont le rayon est de 6 375 795 mètres; pendant une seconde, les corps tombent sous l'équateur de $3^m,64955$: ainsi la force centrifuge est à la pesanteur dans le rapport de 1 à 288,4. La première de ces deux forces diminue la seconde, et les corps ne tombent qu'en vertu de leur différence. Nommons donc *gravité* la pesanteur entière, la force centrifuge est à l'équateur environ le 289^e de la gravité ou 0,0255. Si la rotation de la terre étoit dix-sept fois plus rapide, l'arc décrit dans une seconde sous l'équateur, seroit dix-sept fois plus grand; la force centrifuge seroit alors égale à la gravité, et les corps cesseroient de peser sur la terre à l'équateur.

211. Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe fixe, ses divers points sont animés de vitesses différentes; la connoissance de la vitesse de l'un d'entre eux suffit visiblement pour déterminer celles des autres, puisque les circonférences, et par conséquent les vitesses des points qui les parcourent, sont entre elles comme leurs rayons;

ainsi pour faire connoître le mouvement de rotation d'un corps, il suffit de donner sa *vîtesse angulaire*, c'est-à-dire (197) *la vîtesse du point qui est situé à l'unité de distance de l'axe de rotation*. Soit donc ν la vîtesse angulaire, $v = R\nu$ sera sa vîtesse du point qui est situé à la distance R de l'axe. En rapprochant cette équation de (x') on a pour la force centrifuge

$$N = R\nu^2, \quad \nu = \frac{v}{R} \quad \text{et } \nu = \sqrt{\left(\frac{N}{R}\right)} \ldots\ldots (y')$$

Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe ses divers points sont animés de vîtesses de rotation, et les forces centrifuges qui en résultent sont utiles à comparer entre elles. Soient R et R' les distances de deux points à l'axe; v et v' leurs vîtesses; f et f' leurs forces centrifuges, on a $Rf = v^2$, $R'f' = v'^2$; mais $\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'}$; donc $\frac{f}{f'} = \frac{R}{R'}$. Ainsi *les forces centrifuges des divers points d'un corps tournant autour d'un axe sont proportionnelles à leurs distances à cet axe, et à leurs vîtesses respectives*. Cette conséquence résulte également de l'équation $N = R\nu^2$, puisqu'elle donne $f = R\nu^2$ et $f' = R'\nu^2$.

Soient f et f' les forces centrifuges de deux points de la surface terrestre supposée sphérique, le premier, pris à l'équateur, le second, ayant λ pour latitude; comme $R' = R\cos\lambda$, R étant le rayon de la terre, on voit que $f' = f\cos\lambda$: on a obtenu ci-dessus $f = 0{,}0253$.

IX. *Du mouvement d'un point assujetti à parcourir une surface courbe.*

212. Concevons maintenant un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface courbe donnée par son équation différentielle $dz = pdx + qdy$, p et q étant les

coefficiens des différences partielles de z prises respectivement par rapport à x et à y. Nous ferons pour abréger $M = \sqrt{(1+p^2+q^2)}$. Or on sait (*Analy. appl. à la géom.*, de Monge, n°. 1) que la normale à une surface courbe fait avec les axes des x, y et z, des angles dont les cosinus sont $\frac{p}{M}$, $\frac{q}{M}$, $\frac{1}{M}$. Introduisons, comme au n°. 202, une force N dirigée suivant la normale, égale et opposée à la pression ; ses composantes dans le sens des axes seront $-\frac{pN}{M}$, $-\frac{qN}{M}$, et $\frac{N}{M}$: nous affectons ces deux premières de signes négatifs, parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées x et y, en supposant que la surface courbe trouve sa convexité vers les plans xz et yz. On peut maintenant regarder le point mobile comme libre, et sollicité par les trois forces accélératrices $X-\frac{Np}{M}$, $Y-\frac{Nq}{M}$, et $Z+\frac{N}{M}$: au lieu des équations (b', c'), on aura donc en supposant dt constant

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= X - \frac{Np}{M} \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - \frac{Nq}{M} \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{N}{M}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (z').$$

213. Les équations (z') et (u') ont le même usage ; elles servent à donner toutes les circonstances du mouvement du mobile. En effet, si on multiplie la première par dx, la seconde par dy, et la troisième par dz, en ajoutant, N disparoîtra à cause de $dz = pdx + qdy$, et on obtiendra l'équation (d'), en suivant le même calcul qu'au n°. 168 ;

d'où il résulte que toutes les conséquences énoncées n°. 204 ont également lieu ici.

De plus, si on multiplie les équations (z') respectivement par $-p$, $-q$ et 1, en ajoutant il viendra

$$\frac{d^2z - pd^2x - qd^2y}{dt^2} = Z - pX - qY + \frac{N}{M}(1 + p^2 + q^2).$$

Mais $dz = pdx + qdy$, donne, en différentiant......
$d^2z = p.d^2x + q.d^2y + dp.dx + dq.dy$: ainsi

$$\frac{dpdx + dqdy}{dt^2} = Z - pX - qY + NM,$$

d'où on tire, à cause de $ds = vdt$

$$N = \frac{(dpdx + dqdy)\,v^2}{M.ds^2} + \frac{pX + qY - Z}{M}.$$

Il seroit aisé de déduire de ces formules celles que nous avons trouvées lorsque l'orbite est plane. Dans chaque cas particulier, il est plus convenable de trouver la valeur de N, en faisant le calcul précédent sur les équations mêmes du mouvement qui sont (z'), que d'employer la formule ci-dessus. L'équation (d', 168) donne la vîtesse v, à l'aide de laquelle et de celle de la surface (qui donne p, q, M, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{ds}{dx}$ en fonction de x et y), on obtient N : enfin les formules (z') serviront, concurremment avec l'équation de la surface, à déterminer le lieu du mobile et la courbe qu'il décrit.

214. Pour appliquer ces principes à un exemple, concevons une parabole BAC qui tourne autour de son axe vertical AD ; le paramètre étant $2a$, la surface engendrée aura pour équation, en prenant le point A pour origine, Fig. 108.

$$2az = x^2 + y^2, \text{ d'où } adz = xdx + ydy \ldots (1).$$

On tire de là $p = \frac{x}{a}$, $q = \frac{y}{a}$, $M = \sqrt{\left(1 + \frac{2z}{a}\right)}$.

Supposons donc qu'un point mobile pesant reçoit une impulsion quelconque, et est assujetti à se mouvoir sur le paraboloïde, on aura $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = -g$, et les équations (z') seront ici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{Ma}, \ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{Ma}, \ \frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{N}{M} \ldots (2).$$

L'équation (d') donne $v^2 = 2g(h - z)$, à cause de $Z = -gz$; h est ici une constante qui dépend de la vitesse initiale. Cette expression s'obtient d'ailleurs directement en pratiquant le calcul du n°. 168 : il consiste à multiplier respectivement les équations (2) par dx, dy et dz, puis à ajouter et intégrer, ce qui donne

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = A - 2gz = 2g(h - z) \ldots (3).$$

Eliminons N entre les deux premières équations (2), nous aurons $xd^2y - yd^2x = 0$, d'où $xdy - ydx = Cdt$. Ainsi les aires (170) sont proportionnelles aux tems dans le sens horisontal, ce qui étoit facile à prévoir. Le carré de l'équation (1) ajouté à $C^2 dt^2 = (xdy - ydx)^2$ donne $a^2dz^2 + C^2dt^2 = (x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)$; or $x^2 + y^2 = 2az$; de plus, l'équation (3) donne $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g(h - z) - \frac{dz^2}{dt^2}$; en substituant, on trouve

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\left\{\frac{4agz(h - z) - C^2}{a^2 + 2az}\right\}} \ldots (4)$$

Par l'intégration on déduira z en fonction de t, et par suite toutes les autres circonstances du mouvement.

C'est ainsi, par exemple, que pour obtenir la valeur de la pression N, il faudroit multiplier respectivement les équations (2) par $-x$, $-y$ et a, puis ajouter; il viendroit, à cause de la différentielle de l'équation (1),

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=-ga+N\sqrt{(a^2+2az)}.$$

Mettant ici pour le premier membre sa valeur tirée de la formule (3), ainsi que celle de $\frac{dz^2}{dt^2}$; on a enfin N en fonction de z.

Si on fait $\frac{dz}{dt}=0$, on obtient pour les points où z est un *maximum* ou un *minimum*, les deux valeurs inégales

$$z=\frac{h}{2}\pm\sqrt{\left\{\frac{h^2}{4}-\frac{C^2}{4ag}\right\}}$$

l'une se rapporte au *maximum* et l'autre au *minimum* de l'orbite : elles dépendent des constantes C et h, qui sont relatives aux circonstances initiales du mouvement.

On peut déterminer ces constantes de manière à satisfaire à certaines conditions : si, par exemple, on veut rendre les deux valeurs de z égales, ce qui exige que $h^2ag=C^2$, alors $z=\frac{1}{2}h$: or il est clair que l'orbite est un plan horisontal; car si dans (4) on met h^2ag pour C^2, on trouve $\frac{dz}{dt}=(h-2z)\sqrt{\left(\frac{-g}{a+2z}\right)}$ valeur imaginaire (puisque z est toujours positif), si ce n'est lorsque $z=\frac{1}{2}h$: la vîtesse dans le sens des z est donc nulle, et l'orbite a une élévation constante AD au-dessus du plan xy. Le Fig. 108.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{Nx}{r},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Ny}{r},\ \frac{d^2z}{dt^2}=g+\frac{Nz}{r}\ldots\ldots(2).$$

Multiplions ces équations respectives par dx, dy et dz, ajoutons et intégrons, il vient pour la force vive

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2g(z-h)=v^2\ldots.(3).$$

Pour obtenir la valeur de N, on multiplie respectivement les équations (2) par x, y et z; ajoutant, et ayant égard à la différentielle de l'équation (1) et à l'équation (3), on trouve

$N=\frac{g}{r}(2h-3z)$. Sans chercher à introduire cette valeur dans les équations (2), pour éliminer ensuite, afin d'obtenir les relations entre deux des quatre variables x, y, z et t, on peut éliminer N entre les deux premières. En effet, comme la gravité n'est pas dirigée sans cesse vers l'origine des coordonnées, il est vrai que (170) le principe des aires proportionnelles aux tems n'a point lieu : mais on doit trouver qu'il existe dans le sens horisontal, puisqu'aucune force n'agit parallèlement au plan xy. Multiplions donc respectivement par y et par x les deux premières équations (2); soustrayons et intégrons, il viendra

$$xdy-ydx=Adt\ldots\ldots(4)$$

A étant une constante arbitraire. Les trois équations (2) sont donc remplacées par les expressions (1), (3) et (4) qui sont du premier ordre, et doivent servir à déterminer les valeurs de x, y et z en fonction de t : c'est ce que nous allons voir. Elevons au carré $xdx+ydy=-zdz$, et la formule (4), puis ajoutons, nous aurons.........
$(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)=A^2dt^2+z^2dz^2$; on tire de (1) et (3) la valeur des facteurs du premier membre, et on

trouve enfin

$$dt = \frac{-rdz}{\sqrt{\{2g(r^2-z^2)(z-h)-A^2\}}} \ldots\ldots (5).$$

Nous mettons ici le signe $-$, parce que nous supposons que les tems sont comptés à partir de l'instant où le mobile est au point le plus bas de son orbite, ce qui exige que z croisse, lorsque t décroît.

Cherchons maintenant les *maxima* et *minima* de l'orbite; pour cela il faut faire $\frac{dz}{dt}=0$, ou $dv=0$ puisque $vdv=gdz$; ainsi en ces points la vitesse est aussi un *maximum* ou un *minimum*: $dz=0$ donne en développant

$$z^3 - hz^2 - r^2z + r^2h + \frac{A^2}{2g} = 0.$$

Cette équation a au moins deux racines réelles, car l'orbite a nécessairement un *maximum* et un *minimum*, puisque le mobile ne sort pas de la surface de la sphère. Or les imaginaires étant toujours en nombre pair (*Compl. d'alg.* de Lacroix, 40), notre équation doit avoir ses trois racines réelles : de plus une seule est négative, d'après l'ordre des signes (*Compl.*, 43). On peut donc en désignant par a, b et $-c$ ces trois racines, écrire notre équation sous la forme $(z-a)(z-b)(z+c)=0$, a, b et c étant des nombres positifs. Si on exécute les multiplications et si on compare, on aura

$$a+b-c=h,\ bc+ac-ab=r^2,\ abc=r^2h+\frac{A^2}{2g}.$$

La seconde donne

$$c=\frac{r^2+ab}{a+b} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Substituant dans les deux autres, on trouve

$$h = \frac{a^2 + ab + b^2 - r^2}{a + b}, \quad A^2 = \frac{2g(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{a + b}.$$

Voilà par conséquent les constantes A et h, déterminées en fonction de r, a et b : c est une fonction connue de ces mêmes quantités : b est le z du point le plus élevé et a celui du point le plus bas de l'orbite. Introduisons donc a, b et c au lieu des arbitraires A et h, dans l'équation (5) ; elle devient

$$dt = \frac{-rdz}{\sqrt{\{2g(a - z)(z - b)(z + c)\}}} \ldots\ldots(7).$$

La résolution du probléme dépend de l'intégration de cette formule. En effet supposons que z soit connu en fonction de t : soit A le centre et FDM la projection de l'orbite sur le plan xy ; M sera celle du mobile au bout du tems t. Fig. 93.
Faisons l'angle $MAP = u$ et $AM = \rho$; comme $AP = x$ et $PM = y$, le triangle MAP donne

$$x = \rho \cos u, \quad y = \rho \sin u, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2.$$

Ces valeurs étant introduites dans l'équation (4) donnent $\rho^2 du = Adt$, d'où $du = \dfrac{Adt}{r^2 - z^2}$: en intégrant on aura donc u, et par suite x et y en fonction de t.

Pour avoir le tems de la demi-oscillation, c'est-à-dire de celui que le mobile emploie à parvenir du point le plus bas au point le plus élevé de son orbite, il faut intégrer l'équation (7) entre les limites $z = a$, et $z = b$. Pour cela supposons

$$\sin^2 \theta = \frac{a - z}{a - b}.$$

Cette transformation est destinée à faciliter l'intégration ;

elle est d'ailleurs légitime ; car comme le mobile ne doit jamais sortir des limites $z=a$ et $z=b$, la nature de la question exige qu'on ne puisse jamais avoir $z>b$ et $z<a$; $a-z$ et $a-b$ sont donc positifs. De plus z passe par toutes les grandeurs entre a et b, comme $\frac{a-z}{a-b}$ passe de o à 1, sans sortir de ces limites qui sont aussi celles de $\sin\theta$. Les limites sont remplacées par $\sin\theta=0$, et $\sin\theta=\pm 1$.

Il est aisé de voir qu'on a $z=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$. Or en supposant, pour abréger, $\gamma^2=\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2+r^2-b^2}$, on a

$$a-z=(a-b)\sin^2\theta,\ z-b=(a-b)\cos^2\theta$$

$$z+c=(1-\gamma^2\sin^2\theta)\times\frac{a-b}{\gamma^2},\ dz=2\sin\theta\cos\theta\,(b-a)\,d\theta.$$

En substituant dans l'équation (7) on trouve

$$dt=\frac{2r\gamma}{\sqrt{\{2g(a-b)\}}}\times\frac{d\theta}{\sqrt{(1-\gamma^2\sin^2\theta)}}$$

le développement de $(1-\gamma^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$ est

$$1+\frac{1}{2}\gamma^2\sin^2\theta+\frac{1.3}{2.4}\gamma^4\sin^4\theta+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\gamma^6\sin^6\theta+\text{etc.}$$

Ainsi, on n'a à intégrer que des termes de la forme $d\theta.\sin^m\theta$, m étant un nombre pair : or, les formules connues (*Cal. int. élém.* de Lacroix, 205) donnent

$$\int d\theta.\sin^m\theta=-\frac{1}{m}\cos\theta.\sin^{m-1}\theta+\frac{m-1}{m}\int d\theta.\sin^{m-2}\theta.$$

Nous n'aurons point égard ici au premier terme de cette intégrale, parce qu'il est nul aux deux limites désignées. Un calcul semblable à celui du n°. 196 donne enfin

$$\int d\theta \cdot \sin^m \theta = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m} \times \theta.$$

Or maintenant les limites $\sin\theta = 0$, $\sin\theta = \pm 1$, ne donnent pour θ que les valeurs indéterminées $\theta = k\pi$, $\theta = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, k et n étant des nombres entiers quelconques; cela fait voir que le mobile devra passer une infinité de fois du *maximum* au *minimum* de z: cela s'accorde avec la théorie des oscillations (194). Pour obtenir les tems qui s'écoulent entre ces divers passages, il faudroit prendre tour-à-tour $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{3}{2}\pi$, $= \frac{5}{2}\pi$, ..., quantités qui diffèrent entre elles de π; et comme θ n'entre dans notre intégrale qu'à la première puissance, il est clair que les tems des oscillations sont égaux entre eux.

Pour avoir le tems de l'oscillation entière, il faut prendre pour limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, ce qui donne

$$t = r\gamma\pi\sqrt{\frac{2}{g(a-b)}} \times \left\{1 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.\gamma^2}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5.\gamma^3}{2.4.6}\right)^2 + \text{etc.}\right\}$$

On peut déduire de cette formule les oscillations dans un cercle vertical; car comme la projection de l'orbite sur le plan xy est alors une droite, on a $A = 0$: en remontant aux valeurs précédentes de A, h et c, on voit qu'on a $a = r$, $h = b$, et $c = r$: telles sont les valeurs de z qui répondent au *maximum* et au *minimum*; on a aussi $\gamma^2 = \frac{r-h}{2r}$. En substituant, la valeur de t ci-dessus conduit à celle du n°. 196. Dans le cas des petites oscillations, $\frac{r-h}{2r}$ est une fraction très-petite, et qu'on peut négliger: ce qui donne de nouveau la formule (s', 195).

216. Nous ne dirons rien ici du mouvement d'un corps assujetti à parcourir une courbe à double courbure; car

[illegible] pose

[illegible] à [illegible] vil[illegible]

[illegible]

est évident que pour donner la vîtesse V à la masse $M=nm$, il faut une force $F=nf=\frac{Mf}{m}$. En raisonnant de même pour un autre corps M', on trouve, pour la force propre à lui imprimer la vîtesse V', $F'=\frac{M'f'}{m}$, f' désignant la force capable de donner la vîtesse V' à la portion m du corps M'. Donc $\frac{F}{F'}=\frac{Mf}{M'f'}$ ou $\frac{F}{F'}=\frac{MV}{M'V'}$ puisque les forces f et f' agissent sur la même masse m, et sont proportionnelles aux vîtesses V, V'.

Cette démonstration s'applique toutes les fois que les masses sont commensurables; pour l'étendre à tous les cas, supposons que M et M' étant incommensurables, on ait $\frac{F}{F'}=\frac{MV}{(M'\pm h)V'}$. Partageons M en k masses m égales et plus petites que h, de sorte que $M=km$; soit une autre masse $k'm$ comprise entre M' et $M'\pm h$; la force f propre à lui imprimer la vîtesse V' devant satisfaire à la condition $\frac{F}{f}=\frac{MV}{k'mV'}$, on a ...... $\frac{f}{F'}=\frac{k'm}{M'\pm h}$; ce qui est absurde, puisqu'il faut visiblement une force plus grande, pour communiquer la même vîtesse à une masse plus grande : donc $h=0$.

Ainsi *les forces sont proportionnelles aux produits des masses par les vîtesses* : comme ce produit est une fonction dont l'usage est fréquent, on lui a donné le nom de *Quantité de mouvement*; donc les forces sont proportionnelles aux quantités de mouvement. On peut supposer ci-dessus les forces F et F' égales, ce qui donne

$$MV=M'V' \ldots (a'')$$

On voit donc que la même force, capable de communiquer la vitesse V à la masse M, donneroit à la masse M' la vitesse V', pourvu que *les masses soient en raison inverse des vitesses*; cette force imprimeroit une vitesse k fois plus grande à une masse k fois moindre.

Puisque le rapport $\frac{F'}{M'V'}$ est constant, on peut le représenter par a, et on a $F = aMV$. On peut même prendre $a = 1$; il suffit pour cela de regarder comme unité de force celle qui imprimeroit l'unité de vitesse à l'unité de masse; ce qui revient à faire $F' = 1$, $V' = 1$, $M' = 1$. *Nous mesurerons donc la force d'un corps en mouvement par le produit de la masse de ce corps, par la vitesse dont il est animé.* Lorsque les corps sont hétérogènes, nos raisonnemens s'appliquent encore, pourvu que nous y désignions par m des masses égales, c'est-à-dire des masses qui, animées de vitesses égales et opposées, se feroient équilibre; ou plutôt des corps de même poids, puisque le poids est proportionnel à la masse (50, 248): en général, dans tout ce qui vient d'être dit, on peut substituer les poids aux masses.

218. La Mécanique ne remonte pas aux causes de mouvement; elle ne voit que le fait qui en résulte, et son objet est de rechercher comment ce mouvement se conserve ou se modifie: ainsi les calculs dépendent, non de la force facultative du moteur, mais bien de la force effective qu'il déploye. On peut évaluer l'*effet* d'une puissance de deux manières; par exemple, s'il s'agit de celle d'un homme, on examine, ou quel fardeau il peut supporter, ou quel ouvrage il peut faire dans un tems donné: dans le premier cas, les puissances sont comparées à une *force morte*, c'est-à-dire à la force qui peut leur faire équilibre, et nous avons montré qu'alors les puissances sont

entre elles comme les produits des masses par les vîtesses : dans le second, on les compare à une *force vive*, c'est-à-dire à celle qui pourroit élever un poids à la même hauteur, dans le même tems; et il est évident que dans cette manière d'envisager l'*effet* de la force, cet effet est en raison composée du poids et de la hauteur : soit donc M la masse, φ la force, de la hauteur correspondante au tems dt, $M\varphi de$ ou (e, 152), $Mvdv$ sera l'effet produit durant ce tems dt, et $\int Mvdv = \frac{1}{2} Mv^2$ l'effet durant le tems t. Ainsi *les forces vives sont entre elles comme les produits des masses par les carrés des vîtesses;* c'est ce qui a fait donner le nom de force vive à la valeur v^2 trouvée ci-dessus (d', 168 et 204), car la masse y est $= 1$.

Il y eut autrefois de grandes discussions entre les géomètres pour mesurer la force des corps en mouvement, et savoir si elles étoient proportionnelles au produit de la masse par la vîtesse ou par le carré de la vîtesse. Quoiqu'il ne soit pas de la nature de cet ouvrage de nous arrêter à ces disputes, cependant nous avons cru devoir ne point passer sous silence une doctrine qui a eu pour défenseurs Leibnitz et les Bernoulli. Il résulte de ce qu'on vient de dire que les choses mesurées étant différentes, leurs mesures devoient l'être aussi, et qu'on devoit arriver au même résultat dans les deux cas, puisque les raisonnemens étoient exacts : la discussion ne provenoit que de ce qu'on n'avoit pas attaché au mot *effet* la même idée : la théorie des forces vives montre aussi qu'il est faux d'avancer que *les effets sont proportionnels à leurs causes*. Il est clair qu'il est indifférent de mesurer les forces de l'une ou de l'autre manière, pourvu qu'on raisonne conséquemment à l'hypothèse; et que les résultats de la Mécanique n'y sont nullement intéressés. Nous préférerons l'emploi des forces mortes comme propre à tous les cas d'équilibre ou de mouvement.

Le cas le plus simple du mouvement d'un système est celui où deux corps M et M', mus dans la même droite, se rencontrent; à l'instant où le choc s'opère, les vitesses V et V' des deux corps changent; il s'agit de déterminer les conditions propres à l'équilibre, ou les lois du mouvement après le choc. Nous considérerons d'abord les corps comme parfaitement durs, ce qui exige qu'après le choc les mobiles restent juxta-posés l'un à l'autre, et que si l'équilibre n'a pas lieu, ils prennent un mouvement commun; de plus nous les regarderons comme deux points matériels. On peut observer qu'au lieu de considérer les corps comme sollicités par deux impulsions F, F', et se choquant avec les vitesses V, V' dont ils sont animés, on peut les regarder comme en repos, juxta-posés en leur point de rencontre, et supposer que ces mêmes impulsions F, F', agissent sur eux dans cet état.

1°. D'abord pour le cas d'équilibre, il est nécessaire et il suffit que les forces F et F' soient égales; donc l'équation [illegible] a lieu : ainsi *deux corps qui se choquent en allant en sens contraire, restent en équilibre lorsque leurs masses sont en raison inverse de leurs vitesses, ou, si on veut, lorsque leurs quantités de mouvement sont égales.* La manière dont nous avons démontré ce théorème fait voir que l'équilibre n'a lieu que dans ce cas, et que, par conséquent, la proposition réciproque est vraie.

2°. Passons maintenant au cas où les forces ne sont pas égales : alors la masse M ne fait plus équilibre à la masse M'; mais comme on a dit qu'on pouvait regarder à l'instant du choc les deux corps comme juxta-posés, en repos et recevant dans cet état les impulsions qui les avoient animés, on voit que MV et $M'V'$ étant ces deux forces, le système est composé de la masse $M + M'$ en repos, sollicitée par la force $MV - M'V'$; si les forces agissoient dans le même sens, on auroit la force $MV + M'V'$; enfin si M' est en repos, on a la force MV. Soit v la vîtesse inconnue commune aux deux corps après le choc, la force capable de communiquer à la masse $M + M'$ cette vîtesse v, est évidemment $(M + M')\,v$; donc on a $(M + M')\,v = MV + M'V'$, en regardant V' comme négatif ou comme nul, suivant que M' marchoit en sens contraire de M ou étoit en repos avant le choc; d'où

$$v = \frac{MV + M'V'}{M + M'} \ldots\ldots\ldots\ldots (b'').$$

Si M' étoit en repos, $V' = 0$, et on a

$$v = \frac{MV}{M + M'} \ldots\ldots\ldots\ldots (c'').$$

Ainsi la formule (b'') renferme tous les cas possibles du choc de deux corps, soit qu'ils aillent dans le même sens, soit qu'ils marchent en sens contraire, soit enfin que l'un d'eux soit en repos.

220. La formule (b'') fournit quelques conséquences importantes.

1°. Prenons d'abord le cas où $V' = 0$, qui est renfermé dans l'équation (c''). On voit qu'on a $v < V$ et que plus M' croît, et plus v décroît; de sorte que si M' est infini par rapport à M, on a $v = 0$. C'est ce qui arrive lorsqu'on frappe un édifice, ou quelqu'autre corps dont la masse est considérable : le mouvement du corps choquant est détruit sans qu'il en passe aucune partie dans le corps choqué.

2°. Observons que dans le cas ci-dessus, où le corps M' est en repos, M, qui a la force MV ou $(M + M')\,v$, perd, par le choc, la quantité de mouvement $M'v$, puisque celle qui lui reste est Mv. Or M' acquiert par le différentiant et mettant pour $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ les vîtesses des mobiles, on a la vîtesse du centre de gravité de leur systême. Or avant le choc ces vîtesses sont V et V', ainsi la vîtesse du centre de gravité et $\frac{dX}{dt} = \frac{MV + M'V'}{M + M'}$; cette valeur se réduit à v, qui est la vîtesse des deux corps après le choc, ainsi *la vîtesse du centre de gravité est la même avant et après le choc.* Nous verrons (226, 1°.; et 260, 1°t) que ce théorême n'est qu'un cas particulier d'un autre qui est relatif au mouvemens d'un systême quelconque de corps libres.

5°. La somme des forces vives est $MV^2 + M'V'^2$ avant le choc, et $(M + M')\,v^2$ après le choc : ainsi $MV^2 + M'V'^2 - (M + M')\,v^2$ est la force vive perdue; or en remplaçant V et V' par $V - v$ et $V' - v$, puis rétablissant l'égalité, on trouve $M(V - v)^2 + M'(V' - v)^2$ après avoir mis pour $MV + M'V'$ sa valeur $v(M + M')$: donc *dans le changement brusque qui s'opère par le choc des corps durs, la partie de la force vive qui est détruite, est précisément celle qui résulteroit de la vîtesse perdue par chaque corps.* Ce théorême est dû à *Carnot* qui l'a étendu à un nombre quelconque de corps. Dans le cas d'équilibre, la force vive est entierement détruite.

6°. Nous avons supposé, dans tout ce qui vient d'être dit, que les corps choquans étoient animés de vîtesses constantes : or s'il n'en étoit pas ainsi, on chercheroit, d'après les principes exposés précédemment (153), le tems et le lieu de leur rencontre, ainsi que les vîtesses dont ils sont animés à cet instant : il suffit pour cela de connoître les positions et les vîtesses initiales des corps, ainsi que les forces accélératrices qui les sollicitent. Par là, on retrouveroit dans le cas précédent, et on pourroit facilement déterminer la vitesse des corps après le choc.

[illegible]. Nous avons trouvé ([illegible]) pour la valeur de la force accélératrice $\varphi = \frac{dv}{dt}$; mais nous supposions alors que les puissances agissoient sur le même corps ou sur des masses égales. Maintenant les forces ne sont plus proportionnelles aux simples vitesses, mais bien aux quantités de mouvement; et nous ne pouvons plus introduire, dans les problèmes où il s'agira d'examiner l'action des divers corps, la simple quantité φ, mais bien le produit $m\varphi$ de la force accélératrice φ par la masse m sur laquelle elle agit. Enfin, comme $dv = \varphi dt$, l'élément de la quantité de mouvement est $mdv = m\varphi dt$; c'est cette quantité qui mesure l'accroissement de la force dont le corps m est animé. Celui d'un autre corps m', sollicité par la force φ', seroit de même $m'dv' = m'\varphi' dt$. Pour que ces forces soient égales, on doit avoir $m\varphi dt = m'\varphi' dt$, ou $m\varphi = m'\varphi'$: leur rapport est $\frac{m\varphi}{m'\varphi'}$: ainsi le produit $m\varphi$ mesure l'intensité de la force φ, comme mv mesure celle de la masse m animée de la vitesse v. On nomme la quantité $m\varphi$ FORCE MOTRICE; *c'est le produit de la force accélératrice par la masse qu'elle anime* : de sorte que réciproquement pour avoir la force accélératrice, lorsqu'on connoît la force motrice, il faut diviser celle-ci par la masse.

Nous venons de faire voir qu'on a $m\varphi dt$ pour l'élément de la quantité de mouvement : c'est cette valeur qui sert de mesure à la force d'un corps qui n'a encore qu'une vitesse naissante. Ainsi lorsqu'un corps m posé contre un obstacle est soumis à l'action de la force φ, $m\varphi dt$ est la valeur de la *pression* qu'il exerce : pareillement $mgdt$ est le *poids* du corps m, g étant la gravité.

On voit que les pressions ne peuvent être comparées aux chocs, et qu'elles sont infiniment petites par rapport à eux : de sorte qu'on ne peut mesurer par des poids la force des corps en mouvement. C'est pourquoi un clou entre assez avant dans le corps lorsqu'on le frappe, tandis qu'un poids assez considérable ne produit rien (234).

Comme on ne doit comparer que des pressions entre elles, il est alors inutile de prendre pour leur mesure la quantité $m\varphi dt$, et on peut employer $m\varphi$, puisque dt disparoît dans le rapport $\frac{m\varphi dt}{m'\varphi' dt}$. Ainsi lorsqu'on cherche le poids p d'un corps, il est visible qu'on n'a pour but que de trouver parmi les corps connus celui qui exerce la même pression verticale que celui-là : prenons, par exemple, des corps dont m' soit la masse, et supposons qu'il faille un nombre k de ces corps pour mettre en équilibre le poids p à l'aide d'une balance : il est clair qu'alors les pressions $mgdt$ et $km'gdt$ que ces corps exercent sur les deux plateaux de la balance sont égales, et que $mg = k.m'g$. Soit pris $m'g$ pour unité (ce qui arrive lorsque le corps m' est un gramme ou un kilogramme, etc.), alors $mg = k$, et k est ce qu'on appelle le *Poids absolu* du corps, c'est-à-dire le nombre de grammes qui exercent la même pression verticale, *quantité proportionnelle à la masse* m. Les forces que nous avons considérées en Statique, sont donc ou des pressions, ou des chocs comparés entre eux, puisque ces forces s'entre-détruisent.

II. *De la Résistance des Milieux.*

222. Lorsqu'un corps est en mouvement dans un fluide en repos, il choque à chaque instant les molécules qui le composent pour les déplacer et se faire un passage :

la vitesse de ce corps doit donc diminuer (220, 1°.), car on a $v < V$, et le mouvement se ralentit peu-à-peu par la résistance du milieu, qui est d'autant plus grande que le milieu a plus de densité.

Nous avons dit (50) que dans le vide l'or et la plume la plus légère mettent le même tems à descendre de hauteurs égales en vertu de la gravité; et que la *résistance de l'air* est la cause qui empêche les choses de se passer ainsi, de sorte que les corps qui ont plus de masse tombent avec plus de rapidité que les autres. Supposons, par exemple, deux balles de même diamètre, l'une de plomb, l'autre de liége, qui commencent à tomber en même tems avec la même vitesse V; ces deux balles présentant des surfaces égales à la résistance de l'air, on aura ainsi deux résistances égales, que je représenterai par α. M et M' étant les masses respectives de ces balles, MV et $M'V$ seront leurs quantités de mouvement; et comme la résistance de l'air diminue ces forces de la quantité α, elles deviendront $MV - \alpha$ et $M'V - \alpha$. En divisant (217) ces quantités de mouvement par les masses sur lesquelles elles agissent, on a $v = \frac{MV - \alpha}{M} = V - \frac{\alpha}{M}$ pour la vitesse de la balle de plomb, et $v' = V - \frac{\alpha}{M'}$ pour celle de la balle de liége; d'où $v' < v$, puisque $M' < M$. Le phénomène de la résistance de l'air se répétant à chaque instant, à chaque instant aussi la vitesse du corps dont la masse est la plus grande se trouvera moins diminuée.

Soit A une surface plane exposée au choc perpendiculaire d'un fluide, ou mue elle-même dans un fluide en repos avec la vitesse v. Elle parcourra l'espace vdt dans l'instant dt, et par conséquent aura déplacé un volume $Avdt$ de fluide. Soit donc appelée D la densité de ce fluide, nous aurons $ADvdt$ pour la masse qui aura été mise en mouvement dans l'instant dt, et qui aura par conséquent reçu la quantité de mouvement ADv^2dt : le fluide se rejette sur les côtés du corps et n'est point ainsi poussé en avant et sans cesse pressé; notre explication n'est pas exacte, il est vrai, mais elle conduit à une approximation à laquelle on est obligé de s'arrêter dans une théorie aussi difficile. Soit donc M la masse du corps qui présente la surface A au choc direct du fluide, dv la diminution instantanée de vîtesse causée par la résistance de ce fluide; et comme l'impulsion fait perdre au corps choquant une quantité de mouvement (220, 2°.), égale à celle qu'il communique; on a $Mdv = ADv^2dt$, d'où l'on voit que la force R que cette résistance oppose est $\frac{dv}{dt} = \frac{AD}{M} \times v^2 = R$; elle est *proportionnelle au carré de la vîtesse.*

Lorsque la surface A se présente obliquement au choc du fluide, la résistance, qui est toujours perpendiculaire à cette surface, n'est plus mesurée par cette valeur : soit v la vîtesse, α l'angle qu'elle fait avec la surface, ou l'*angle d'incidence* : on décompose la vîtesse oblique v en deux autres; l'une normale à la surface, et l'autre dirigée dans le sens de cette surface. La dernière ne produit aucune résistance; l'autre a pour valeur $v \sin \alpha$. On remplace donc v par $v \sin \alpha$ dans la valeur précédente, ce qui donne pour la résistance $DAv^2 \sin^2 \alpha = MR$.

Lorsqu'on considère le mouvement dans un fluide élastique, il faut doubler ces valeurs de la résistance; car (u', n°. 225, II) est double de v (c'', 219).

223. Ramenons la première de ces valeurs à des mesures connues. Soit h la hauteur due à la vîtesse v, on a $v^2 = 2gh$, ou $R = \frac{2\,ADgh}{M}$. Or $2\,Ah$ est le volume d'un prisme qui a

A pour base et $2h$ pour hauteur; $2DAh$ est donc la masse d'un prisme de fluide qui a la surface pressée pour base et pour hauteur le double de celle qui est due à la vîtesse v: $2DAgh$ est le poids P de ce prisme; de sorte que $R = \frac{P}{M}$.

Les auteurs qui ont traité de la résistance des fluides ne s'accordent entre eux que sur la proportionnalité au carré des vîtesses : mais ils diffèrent sur la valeur absolue de cette résistance. La formule relative au choc oblique ne s'accorde même nullement avec l'expérience lorsque l'angle est moindre de 40°, et sur-tout lorsque cet angle est fort petit. Newton a reconnu que la résistance ne devoit être que la moitié de ce que donne l'expression précédente; il a trouvé (Principes de math., livre II, sect. VII) que la résistance d'un cylindre est double de celle d'une sphère, et que cette dernière est

$$R = \tfrac{3}{8} \cdot \frac{D}{D'} \cdot \frac{v^2}{k}.$$

D' étant la densité d'un globe qui est mu dans le fluide, k le diamètre de ce globe. Cette valeur est assez d'accord avec celle que l'expérience donne, dans le cas où les vîtesses ne sont pas très-considérables : mais lorsqu'il s'agit des globes métalliques lancés par les bouches à feu, il faut substituer 0,45 à $\frac{3}{8}$ dans la formule précédente : c'est du moins ce que l'expérience paroît confirmer. La théorie précédente n'est pas d'accord avec l'expérience; cela tient à la nature même des fluides qui ne nous est pas connue, ce qui rend les circonstances du choc différentes de ce que nous les avons supposées. Il suit de cela que si le corps que nous avons considéré en mouvement (162 et 173) est une sphère, dont k est le diamètre il faut remplacer les coefficiens m et $\frac{1}{2}A$, par $\frac{3}{8} \cdot \frac{D}{D'k}$, ou par $(0,45) \times \frac{D}{D'k}$, suivant que le mouvement est lent ou très-rapide : $\frac{D'}{D}$ est le rapport entre les pesanteurs spécifiques du mobile et du fluide (276).

224. Pour completter la théorie (162) de la chûte des corps graves, tirons de la relation entre e et v donnée page 220, pour la vîtesse d'un corps qui tombe verticalement dans un milieu résistant $v = \frac{1}{a} \sqrt{(1 - c^{-2me})}$, c étant la base des logarithmes népériens : en mettant cette valeur dans celle de t, on trouve, tout calcul fait,

$$e = \frac{1}{m} \cdot \log \left\{ \frac{c^{agt} + c^{-agt}}{2} \right\}, \text{ ou } e = \frac{1}{m} (agt - \log 2),$$

en négligeant c^{-agt} qui est une très-petite quantité. Plus e croît, plus le radical de la valeur de v approche de l'unité, et plus le mouvement est près d'être uniforme; la vîtesse approche de $\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{g}{m}}$, sans qu'à la rigueur elle puisse atteindre cette valeur, même dans un milieu infini. Dans ces formules g n'est plus $9{,}81^{m}$, car le poids des corps doit être diminué de celui du fluide qu'ils déplacent (283), et on doit remplacer g par $g' = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) g$. Si le corps tombe dans le vide, il a acquis (h, 156) la vîtesse $\sqrt{\frac{g'}{m}}$, après être tombé de la hauteur...........

$$e = \frac{g'}{2gm} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(D' - D)\,k}{D}$$: pour une balle de plomb qui tombe dans l'eau $D' = 11{,}4$, $D = 1$, ainsi

ce corps ne peut jamais acquérir une vitesse égale à 13 fois son diamètre, plus huit dixièmes.

III. *Choc des Corps élastiques.*

225. Passons maintenant au choc direct des *Corps élastiques*. Avant tout, examinons les circonstances physiques qui accompagnent le choc de ces corps à ressort. Lorsqu'un corps élastique va choquer un plan dur et inébranlable, l'effet du choc force ce corps à changer de figure; il s'*aplatit* en se comprimant jusqu'à ce que la réaction du plan choqué ait éteint son mouvement. C'est alors que commence le phénomène de l'élasticité. On doit le regarder comme produit par une force qui, agissant de l'intérieur du corps vers l'extérieur, repousse les molécules que la compression a déplacées, pour les remettre dans leur état primitif. Il arrive donc que le corps se *rétablit*; et si son ressort est parfait, la force avec laquelle ce rétablissement s'opère est égale et opposée à celle de la compression. Le plan sert alors d'appui: à mesure que le corps reprend sa figure, toutes ses parties reçoivent une impulsion en sens contraire de celui du choc; il repousse donc le plan, ou, ce qui revient au même, il en est repoussé; et par conséquent il retourne en arrière.

Appliquons ces considérations au choc de deux corps élastiques M et M', qui sont animés des vitesses V et V' dirigées dans le même sens. M poursuit M', et lorsque ces deux mobiles se rencontrent (ce qui exige qu'on ait $V > V'$), ils se pressent mutuellement jusqu'à ce qu'ils aient acquis une vitesse commune v : alors M a perdu la vitesse $V - v$, tandis qu'au contraire M' a gagné la vitesse $v - V'$. Dans cet état, les corps ne se pressent plus, ils sont simplement juxtà-posés, et ils ont atteint leur *maximum* de compression. Jusqu'ici la force de restitution n'a point été mise en jeu, et il est clair que tout s'est passé comme si les corps avoient été durs : de sorte que la vîtesse v, qui est commune aux deux corps, n'est autre que celle dont nous connoissons déja la valeur (b'').

Mais tout-à-coup la restitution s'opère ; les corps ne restent même qu'un instant infiniment court, dans cet état *stationnaire* qui sépare l'instant de la compression de celui du rétablissement. Nous avons dit que l'élasticité devoit être considérée comme une force agissant de l'intérieur des corps vers l'extérieur : dans l'état où sont nos deux corps juxtà-posés et sans pression mutuelle, cette force exerce son action sur chacun d'eux, et son intensité est la même que celle avec laquelle ils se sont comprimés, à cause du ressort supposé parfait. On voit donc que le corps M' sera poussé par l'élasticité de M dans le sens de la tendance commune, et par conséquent devra gagner de nouveau la vîtesse $v - V'$: tandis qu'au contraire le corps M sera repoussé en arrière par l'élasticité de M', et devra perdre encore la vîtesse $V - v$. Ainsi M aura perdu la vîtesse $2(V - v)$, et M' aura gagné celle $2(v - V')$: donc en désignant par u et u' les vîtesses de M et M' après le choc, on a $u = V - 2(V - v)$, et $u' = V' + 2(v - V')$; ou

$$u = 2v - V, \quad u' = 2v - V' \ldots\ldots (d'').$$

La valeur de v est d'ailleurs connue par l'équation (b''). On peut la substituer ici, et il vient

$$u = \frac{V(M - M') + 2M'V'}{M + M'}, \quad u' = \frac{-V'(M - M') + 2MV}{M + M'}.$$

Ces formules font voir que si les masses sont égales, les n … e *changement brusque qui s'est opéré dans celui* … *iles*.

… force vive n'est point la même (220, 5°.) avant … le choc des corps durs ; s'ils sont élastiques, elle … part $MV^2 + M'V'^2$, et de l'autre $Mu^2 + M'u'^2$: … tituant les valeurs (d''), cette dernière quantité … nt

$$4v^2(M+M') - 4v(MV+M'V') + MV^2 + M'V'^2.$$

Les deux premiers termes se détruisent visiblement (b''), et comme il ne reste que $MV^2+M'V'^2$, on voit que, malgré le changement brusque de mouvement, *dans le choc des corps élastiques la force vive est la même avant et après le choc.*

3°. Les valeurs (d'') deviennent $u = 2v - V$, $u' = 2v \pm V'$ en cumulant ensemble tous les cas. Ainsi, après le choc *la vîtesse relative*, ou $u - u'$, est..... $= -(V \pm V')$; or $V \pm V'$ est la vîtesse relative avant le choc ; donc *les vîtesses relatives, avant et après le choc, sont égales et dirigées en sens contraires* : ou, ce qui revient au même, *à des instans égaux pris avant et après le choc, les mobiles sont à la même distance l'un de l'autre.*

Fig. 109. 227. Soit CD un plan fixe, et A un mobile à ressort parfait, lancé avec la vîtesse AF : décomposons cette vîtesse en deux autres, dont l'une FI soit perpendiculaire au plan, et dont l'autre CF soit dirigée dans le sens du plan. Celle-ci n'éprouve aucun obstacle à son effet entier ; quant à l'autre, si elle existoit seule, l'élasticité devroit communiquer au mobile la vîtesse FI de F vers I ; ainsi lorsque le mobile est parvenu en F, il est soumis à l'action de deux forces qui lui communiquent les vîtesses FI et $FD = FC$; donc il aura dans la direction FB la

vitesse FK. On nomme AFI l'angle d'incidence, et KFI l'angle de réflexion ; comme les deux rectangles CI et ID sont égaux, il est visible que ces angles le sont aussi. Donc *lorsqu'un corps à ressort parfait vient choquer un obstacle, il se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.*

Si le mobile alloit choquer une surface courbe ou une courbe, il faudroit concevoir au point de contact un plan tangent, ou une tangente, et y appliquer ce qui vient d'être dit. Alors les angles d'incidence et de réflexion sont ceux que forment avec la normale les directions du mobile avant et après le choc : rien n'est donc plus aisé que de déterminer l'un de ces angles par l'autre.

228. Voici les solutions graphiques de divers problêmes intéressans, relatifs au choc oblique des corps à ressort.

I. *Trouver en quel point* F *d'un plan* CD, *on doit faire choquer un mobile placé en* A *pour qu'il aille rencontrer un corps placé en* B. Fig. 109.

Menons AH perpendiculaire sur CD; prenons $AC = CH$; menons HB, le point F de rencontre de cette droite avec CD sera le point cherché. En effet, les triangles ACF et HCF étant égaux, on en conclut qu'il y a égalité entre les angles AFC, CFH et DFK : donc, etc. Au jeu de billard on appelle *Bricoller* toucher une bille placée en B, après avoir frappé la bande CD.

II. *Résoudre le même probléme par une double bricolle.*

A est le corps choquant, B le corps qu'on veut toucher; menons AH perpendiculaire sur IL ; prenons $AI = IH$; menons FH parallèle à LI, et rencontrant KL en G ; prenons $GH = FG$; enfin menons FB, et par les points C et H la droite CH : les points D et C seront ceux où le corps A doit choquer IL et LK. En effet les angles Fig. 110.

ADI et *CDL* sont égaux à l'angle *IDH* : de même les angles *FCG*, *GCH* et *BCK* sont égaux.

Nous supposons ici les billes réduites à leur centre ; ainsi dans ces deux problèmes on doit remplacer chaque bande d'un billard par une ligne parallèle qu'on imagine en dedans et à une distance de la bande égale au rayon de la bille.

III. *Etant données les deux sphères ou billes égales* A *et* L, *faire en sorte que celle-ci étant choquée par la première, aille en* C ; *trouver la direction du mouvement de la bille* A *après le choc.*

Menons *CL* par le point *C* et le centre de la bille *L* ; faisons toucher la bille *A* au point *I* où la surface est rencontrée par *CL*. Soit *Ii* le rayon de la bille : il est clair que si on prolonge *CL* en *B*, et que si on abaisse sur *BI* la perpendiculaire *iD*, la force *Ai* équivaudra aux forces *Bi* et *iD* qu'on trouve en formant le rectangle *BD*. La première est entièrement employée à faire mouvoir la bille *L*, et à lui donner la vitesse *Bi* (225, II. 1°), et elle est détruite dans la bille *A*. La deuxième ne contribue pas au choc : elle a donc son entier effet, et *iD* sera la direction de la bille *A* après le choc.

IV. *Principe de d'Alembert.*

229. On doit à d'ALEMBERT une méthode directe et générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équation tout problème de dynamique, par laquelle toutes les lois du mouvement des corps sont réduites à celles de leur équilibre. Avant lui, Jacques Bernoulli avoit déja traité d'une manière à-peu-près semblable quelques problêmes de Dynamique : toutefois d'Alembert est regardé comme l'inventeur du principe dont il s'agit, car celui-

là doit avoir la gloire de la découverte qui sait en tirer parti et l'appliquer à nos besoins. Voici en quoi consiste le théorême connu sous le nom de *Principe de d'Alembert*.

Concevons un système de corps sollicités par des forces quelconques ; la liaison de ces corps contraindra chacun d'eux à prendre un mouvement différent de celui qu'il auroit pris s'il eût été libre : or si on introduit de nouvelles forces, qui, en agissant sur chaque corps en sens contraire de son mouvement effectif, soient capables de le détruire, il y aura équilibre ; d'où il suit que *dans tout systéme les quantités de mouvement imprimées, et celles qui ont lieu prises en sens opposé, doivent se faire mutuellement équilibre, en ayant égard à la nature du systéme.*

Ce principe porte avec soi un caractère d'évidence et de simplicité qui lui est propre ; il est d'ailleurs précieux par sa très-grande généralité : car en exprimant par des équations la liaison des parties du système, ainsi que l'équilibre entre les forces imprimées, et celles qui ont lieu prises en sens opposé ; on obtient des expressions analytiques propres à faire connoître celles-ci, et par conséquent le mouvement de chaque corps. C'est ce qui sera rendu plus clair par les applications que nous allons en faire. Commençons d'abord par des cas fort simples.

230. *Choc des corps.* Soient deux mobiles M et M' animés des vîtesses V et V', quelles seront leurs vîtesses u et u' après le choc ? On suppose que les vîtesses ont le signe positif, c'est-à-dire que les deux corps se meuvent dans le même sens. On a donc

masses.	vîtesses imprimées.	vîtesses effectives.
M	V	u
M'	V'	u'.

Si, à l'instant où le choc s'opère on imprimoit en sens contraire à chaque masse la vîtesse respective u et u', il y auroit équilibre; les forces qui se détruisent sont donc

$$MV,\ MV',\ -Mu \text{ et } -M'u'.$$

Or pour l'équilibre on a vu (a'', 217) que la somme des quantités de mouvement, prises avec leurs signes, doit être nulle; donc on a $MV+M'V'-Mu-M'u'=0$. Cette équation unique ne peut pas faire connoître u et u'; il faut donc recourir à la nature du système pour en obtenir une seconde. Nous ferons remarquer que le principe de d'Alembert ne suffit pas pour déterminer le mouvement: on a des occasions nombreuses d'appliquer cette observation.

Si les corps sont durs, après le choc ils restent juxtaposés, et se meuvent avec la même vîtesse v; donc par la nature du système $u=u'=v$: on en déduit l'équation (b''). Si les corps jouissent d'une élasticité parfaite, comme la force de leur choc dépend de leurs vîtesses relatives, et que la force de restitution est égale à celle de leur compression; on peut voir *à priori*, que les vîtesses relatives sont égales et opposées avant et après le choc: ainsi on a $u-u'=V'-V$. En éliminant entre ces deux équations, on obtient pour u et u' les valeurs déja trouvées (225).

Il seroit facile d'appliquer le même raisonnement au cas où les mobiles vont en sens contraire, et au cas où l'un d'eux est en repos: il est inutile de nous y arrêter; on fera simplement V' négatif ou nul dans nos équations.

Fig. 112. 231. *Mouvement sur la poulie.* Soient m et m' les masses de deux poids P et Q unis par un cordon non pesant passé dans la gorge d'une poulie BFC; cherchons les circonstances de leur mouvement. Soit v la vîtesse

avec laquelle les corps se meuvent, m' en montant et m en descendant; cette vîtesse est prise positivement pour les deux corps, parce que comme la poulie ne sert ici qu'à changer les directions des forces, on peut regarder comme positives les directions qui sont dans le sens $m'CFBm$, comme s'il ne s'agissoit que d'une droite. La gravité g qui sollicite les deux corps leur a déja, au bout du tems t, communiqué la vîtesse v; et dans l'instant suivant, elle imprime à chacun d'eux la vîtesse gdt; mais l'une de ces impulsions est dirigée dans le sens du mouvement de m, tandis que l'autre a lieu pour m' dans un sens opposé. Si donc le fil venoit à se rompre au bout du tems t, les vîtesses de m et m' seroient $v+gdt$, et $v-gdt$ dans l'instant suivant. Or par la liaison du système, la vitesse devient pour tous deux $v+dv$; et on a le tableau suivant :

masses	vîtesses imprim.	vîtesses effectives.
m	$v+gdt$	$v+dv$.
m'	$v-gdt$	$v+dv$.

D'ailleurs, pour l'équilibre entre les forces imprimées et celles qui ont lieu prises en sens contraire, il faut (217) que la somme des quantités de mouvement (prises avec leurs signes) soit nulle; ce qui donne

$$m(v+gdt)+m'(v-gdt)-m(v+dv)-m'(v+dv)=0,$$

ou en réduisant $(m-m')gdt-(m+m')dv=0$; d'où

$$v=\frac{m-m'}{m+m'}\cdot gt+C.$$

$$e=\frac{m-m'}{m+m'}\cdot\tfrac{1}{2}gt^2+Ct+E.$$

Ce qui prouve que le mouvement est uniformément varié.

Comme les poids sont proportionnels aux masses (50), on peut remplacer ici m et m' par P et Q, ainsi que dans les problêmes suivans.

Il se présente ici deux cas, suivant qu'on a originairement laissé partir les mobiles du repos en les abandonnant à la seule gravité, ou qu'on leur a fait prendre une vîtesse initiale, en donnant une impulsion à l'un d'eux.

232. Dans le premier cas on a visiblement $C = 0$; et si on compte les e à partir du point de départ de chaque corps, on a aussi $E = 0$; ce qui donne

$$e = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot \tfrac{1}{2} gt^2, \quad v = \frac{m - m'}{m + m'} \cdot gt \ldots\ldots (e'').$$

233. *Athood*, physicien anglais, a employé ces formules à la vérification de tout ce qui a été exposé précédemment sur la nature et les effets de la gravité, sur le choc des corps durs, etc. Il s'est servi pour cela d'une machine qui consiste en une poulie BFC, et deux poids P et Q, unis par un cordon $mBFCm'$; il a de plus rendu cette machine susceptible d'une très-grande précision, 1°. en faisant porter l'axe de la poulie sur des rouleaux mobiles, afin d'en diminuer le frottement (131); 2°. en suspendant les poids P et Q à des soies très-fines, afin que celui des deux corps qui a de son côté une plus grande longueur de cette soie n'ait pas son poids sensiblement augmenté; 3°. en ajoutant au système une horloge sonnant les secondes; 4°. en faisant porter cet appareil par un pied marqué de divisions égales. Fig. 112.

La machine d'Athood sert à plusieurs expériences intéressantes : 1°. si on suspend deux poids égaux, mais qu'on charge l'un d'eux d'un poids additionnel, puis qu'à l'aide d'un arrêt attaché au support, on enlève ce poids à un instant déterminé de la chûte, le mouvement devra continuer uniformément avec la vîtesse acquise. On pourra donc créer un mouvement physique propre à donner une idée exacte de ce que nous avons nommé la vîtesse des corps (149), et modifier cette vîtesse à son gré; 2°. si on prend des poids m et m' dont la différence soit petite et déterminée, les valeurs (e'') de la hauteur e et de la vîtesse v de la chûte seront d'autant moindres que ces poids seront eux-mêmes plus grands: la chûte sera aussi lente qu'on voudra, et on pourra en évaluer avec précision la quantité à chaque instant; 3°. puisque l'expérience fera connoître les valeurs de e et t correspondantes, tout sera connu dans les équations (e''), excepté g; en négligeant, par approximation, la résistance de l'air, parce que le mouvement a peu de rapidité; on peut donc, à l'aide de cette machine, vérifier la mesure de la gravité g dont nous avons précédemment trouvé la valeur (195, 4°.).

234. Dans le second cas, si au lieu d'abandonner simplement les corps à la gravité, on a imprimé de haut en bas à P l'impulsion V; cette vîtesse a dû être répartie entre les deux masses m' et m, suivant la même loi que si m choquoit avec la vîtesse V le corps m' en repos: ainsi la vîtesse commune aux deux poids est $\dfrac{mV}{m+m'}$, (c''). Telle sera la valeur de la vîtesse lorsqu'on compte $t=0$, ou plutôt celle de la constante C; donc

$$v=\frac{mV+(m-m')gt}{m+m'}\dots\dots\dots(f'').$$

On déduira aisément de là e en fonction de t. Si on a $m'<m$, $(m'-m)gt$ et v sont positifs. Ce qui fait voir que le poids P l'emportera dès le premier instant.

[illegible] vitesse [illegible] m au bout du tems t : comme les circonférences sont proportionnelles aux rayons, et que les vitesses de m et de m' sont dans le rapport des circon[illegible] [illegible] $\frac{[illegible]}{r}$ [illegible] sera celle de m. Si les [illegible] tour-à-tour dans l'instant [illegible] [illegible] communiqué à chacun d'eux l'impu[illegible] [illegible] comptant les vitesses [illegible] [illegible] fait dans les [illegible] [illegible] seroient les [illegible] [illegible] par la liaison du système [illegible]

[illegible] effectives [illegible]

[illegible]

237. Jusqu'ici nous avons fait abstraction du *poids des cordons*; il ne seroit guère plus difficile d'y avoir égard. En effet, prenons d'abord le cas de la poulie; représentons par p la masse de l'unité de longueur du cordon, et par a sa longueur entière diminuée de la partie BFC; soit z la longueur Bm de la partie de ce cordon qui est du côté du poids P; $a-z$ sera Cm', c'est-à-dire celle qui est de l'autre côté au bout du tems t : les poids respectifs de ces cordons sont donc pz et $p(a-z)$. En raisonnant comme ci-dessus (232), on verra qu'on a Fig. 112.

masses.	v. imprimées.	v. effectives.
$m+pz$	$v+gdt$	$v+dv$
$m'+p(a-z)$....	$v-gdt$	$v+dv$.

L'équilibre entre les forces imprimées et les forces effectives, prises en sens opposé, donne

$$dv=\frac{m-m'+p(2z-a)}{m+m'+pa}.gdt.$$

On intègre cette équation en la multipliant par $vdt=dz$, et on trouve, tout calcul fait,

$$v^2=2g\times\frac{(m-m'-pa)z+pz^2+C}{m+m'+pa}.$$

Lorsque la vitesse est nulle en même tems que z, on a $C=0$: on détermineroit aisément dans tout autre cas la valeur de la constante C. Pour obtenir une relation entre z et t, on met $\frac{dz}{dt}$ pour v, et il ne s'agit plus que d'intégrer une fonction de la forme $Adt=\frac{dz}{\sqrt{\{\alpha+\beta z+\gamma z^2\}}}$, ce qui n'offre aucune difficulté.

Le mouvement sur le treuil, en ayant égard aux poids des cordons, se traite absolument de la même manière. Conservons
Fig. [illegible] les notations du n°. 256 ; de plus nommons l et n les longueurs des cordons lorsque $z=0$, et z la longueur de cordon qui se développe de dessus la roue durant le tems t. L'autre cordon s'enveloppera en même tems sur le cylindre d'une longueur $\frac{r}{R}z$. Ainsi les cordons auront pour longueurs au bout du tems t, $Dm = l - z$, et $Dm' = n - \frac{r}{R}z$; leurs masses seront $p(l - z)$, et $p\left(n - \frac{r}{R}z\right)$; et on aura

masses.	v. impr.	v. effectives.
$m + p(l - z)$	$v - gdt$	$v + dv$
$m' + p\left(n - \frac{r}{R}z\right)$	$\frac{rv}{R} - gdt$	$\frac{r}{R}(v - dv)$.

Il suffira donc de remplacer, dans les calculs du n°. 256, m et m' par $m + p(l - z)$ et $m' + p\left(n - \frac{r}{R}z\right)$; on obtiendra une expression de la forme $dv = \frac{a - bz}{a' - b'z} \times dt$, qu'on intégrera comme ci-dessus, après l'avoir multipliée par $vdt = dz$. Nous ne pousserons pas plus loin des calculs qui n'appartiennent plus à la Mécanique.

258. Dans l'article précédent [illegible] fait abstraction de l'inertie de la poulie [illegible] nous venons de parler [illegible] poulie sont [illegible] par [illegible] une partie de son action [illegible] cette machine un mouvement [illegible] Réparons cette omission volontaire

Tout ce que nous avons dit dans le n°. précédent de l'action de la pesanteur sur les masses m et m' et sur les cordons, a également lieu ici, et il n'y a rien à changer. Mais en outre remarquons que toutes les particules de la poulie ont un mouvement commun de rotation, et que la vîtesse des points de la circonférence est celle des poids P et Q; de sorte qu'elle est $= v$, au bout du tems t. Mais les particules qui sont plus voisines de l'axe ont une vîtesse moindre, et la diminution se fait dans le rapport des circonférences qu'elles décrivent, ou plutôt de leurs distances à l'axe; de sorte que si nous considérons des molécules dont les masses soient μ', μ'', ... distantes de l'axe de ρ', ρ'', ... en nommant r le rayon de la poulie, leurs vîtesses (211) seront $\frac{\rho' v}{r}$, $\frac{\rho'' v}{r}$, ... La pesanteur n'exerce d'ailleurs aucune action sur elles, et au bout du tems $t + dt$, on a le tableau suivant: Fig. 113.

masses.	v. imprimées.	v. effect.	dist. à l'axe.
$m + pz$	$v + gdt$	$v + dv$	r
$m' + p\,(a - z)$	$v - gdt$	$v + dv$	r
μ'	$\frac{\rho'}{r} v$	$\frac{\rho'}{r}(v + dv)$	ρ'
μ''	$\frac{\rho''}{r} v$	$\frac{\rho''}{r}(v + dv)$	ρ''
etc.	etc.	etc.	etc.

Pour l'équilibre entre les forces imprimées et les forces effectives prises en sens contraire, il faut que la somme des momens de ces quantités de mouvement par rapport à l'axe (45) soit nulle, et on a

$$[m - m' + p(2z - a)]gdt = dv\left\{m + m' + pa + \frac{S(\mu\rho^2)}{r^2}\right\}$$

en désignant par $S(\mu\rho^2)$ la somme des termes..... $\mu'\rho'^2 + \mu''\rho''^2 +$ etc., c'est-à-dire la somme des produits des molécules par les carrés de leurs distances à l'axe, de sorte qu'en multipliant cette équation par $dz = vdt$, et intégrant, on obtient

$$v^2 = \frac{(m - m' - pa)z + pz^2}{r^2(m + m' + pa) + S(\mu\rho^2)} \times 2gr^2.$$

Le reste n'a plus de difficulté. Quant à la valeur de la quantité $S(\mu\rho^2)$, nous allons nous occuper des moyens de la trouver, non-seulement pour une poulie de dimensions connues, mais encore pour un corps et un axe quelconques, parce que par la suite nous en aurons fréquemment besoin.

V. *Moment d'inertie.*

239. Soient m', m'', m''',... les masses des molécules d'un corps de figure connue; ρ', ρ'', ρ''', ... leurs distances à un axe quelconque : on a nommé MOMENT D'INERTIE, la quantité

$$m'\rho'^2 + m''\rho''^2 + m'''\rho'''^2 + \text{etc.} = S(m\rho^2).$$

C'est *la somme des produits des masses des molécules du corps, par les carrés de leurs distances à l'axe.* Comme nous supposerons que ce corps est homogène, il faut remplacer, dans tout ce qui va être dit, les masses des molécules par leurs volumes qui leur sont proportionnels.

La quantité $S(m\rho^2)$ ne dépend que de la forme du corps et de la position de l'axe; de sorte que comme elle est indépendante du tems, elle l'est aussi de toute idée de mouvement; en un mot *cette fonction est purement géométrique et essentiellement positive :* cependant

ellerons, pour abréger, *axe de rotation*, l'axe
auquel on cherche le mouvement d'inertie. Soient
y'',... les coordonnées des molécules m', m'',...
en regardant l'axe donné comme étant celui
On a $\rho'^2 = x'^2 + y'^2$, etc.; et

$$= m'(x'^2+y'^2)+m''(x''^2+y''^2)+\text{etc.}=S.m(x^2+y^2)..(g'')$$

Ainsi, pour trouver le moment d'inertie T d'un corps par rapport à l'axe des z, on évaluera le volume m d'une molécule en fonction des différentielles de ses coordonnées x, y et z, et on intégrera dans toute l'étendue du corps la quantité $m(x^2+y^2)$, en suivant les mêmes procédés que pour les quadratures et les centres de gravité (p. 74). Mais il arrive très-souvent que l'équation qui détermine la forme du corps n'a pas pour axe des z celui par rapport auquel on cherche le moment d'inertie. L'emploi de l'équation précédente exige donc dans ce cas la résolution de ce problême qui ne dépend que d'une transformation de coordonnées : *Trouver le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque.*

240. Supposons d'abord que l'axe de rotation soit parallèle à celui des z : il est visible que la transformation qu'il faut employer consiste à transporter l'origine des coordonnées au point où l'axe de rotation rencontre le plan xy. Soient h et l les coordonnées de ce point, et r sa distance à l'origine, ou la distance entre les deux axes parallèles, de sorte que $h^2+l^2=r^2$: on changera donc simplement x' et y' en $x-h$ et $y-l$, dans $x'^2+y'^2$; de sorte qu'en multipliant par m et intégrant, on aura

$$S.m(x^2+y^2)+r^2M-2hMX-2lMY\ldots\ (1).$$

M désigne ici la masse entière du corps, ou $m'+m''+$etc.

X et Y sont les coordonnées du centre de gravité; de sorte que (A', 54) on a $MX = m'x' + m''x'' +$ etc., $MY = m'y' + m''y'' +$ etc. La fonction (1) résout complettement le problême proposé, car le premier terme est le moment d'inertie relativement à l'axe des z comme s'il étoit celui de rotation; le second terme est constant et connu; enfin on obtient les deux autres par des intégrations (*Voyez* p. 74).

Si l'axe des z passait par le centre de gravité, alors la valeur (1) se simplifieroit beaucoup, car X et Y seroient nuls; le moment d'inertie se réduiroit dans ce cas à

$$S.m\,(x^2 + y^2) + r^2 M \ldots\ldots\ldots\ldots (h'').$$

Or dans cette formule, r^2M est le produit de la masse entière du corps par la distance du centre de gravité au nouvel axe; le premier terme est le moment d'inertie pris par rapport à l'axe passant par ce centre: donc, *pour avoir le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite, quand on connoît la valeur de ce moment par rapport à une autre droite parallèle passant par le centre de gravité, il faut à cette valeur ajouter le produit de la masse du corps par le carré de la distance entre les deux axes.*

On écrit souvent la formule (h'') sous une autre forme plus commode. On suppose, ce qui est visiblement permis, que $Mk^2 = S.m\,(x^2 + y^2)$; de sorte que k^2 est le quotient du moment d'inertie du corps, par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité, divisé par la masse du corps. Alors le moment d'inertie est

$$M\,(r^2 + k^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i'').$$

241. Il nous reste à trouver le moment d'inertie relativement à un axe quelconque Az passant par l'origine A: Fig. 114.

pour cela, nous allons chercher à transformer toute formule en x, y et z, en une autre qui soit fonction de trois nouvelles coordonnées rectangles x', y', z'. Projettons l'axe Az des z en AB sur le plan des $x'z'$, et soit θ l'angle zAB que cet axe fait avec cette projection soit aussi η l'angle $z'AB$ qu'elle forme avec l'axe des z'; θ et η déterminent la position de l'axe de rotation Az. Pour effectuer la transformation dont il s'agit, soit d'abord pris AB pour axe des z, sans changer celui Ax des x. Les formules connues (*Traité de* Biot, n°. 77) qui servent aux changemens de z et y en $z_{,}$ et $y_{,}$, relatives aux coordonnées rectangles dans le plan yz, donnent

$$z = z_{,}\cos\theta + y_{,}\sin\theta, \quad y = -z_{,}\sin\theta + y_{,}\cos\theta, \quad x = x_{,}$$

de même pour changer l'axe AB des $z_{,}$ en Az', sans changer l'axe Ay' des $y_{,}$, on emploie le même procédé;

$$z_{,} = z'\cos\eta + x'\sin\eta, \quad x_{,} = -z'\sin\eta + x'\cos\eta, \quad y_{,} = y'$$

de sorte qu'en combinant ces résultats

$$\left.\begin{array}{l} z = z'\cos\eta\cos\theta + x'\sin\eta\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -z'\cos\eta\sin\theta - x'\sin\eta\sin\theta + y'\cos\theta \\ x = x'\cos\eta - z'\sin\eta \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(1).$$

Pour appliquer ceci au cas présent, il faut transformer en x, y et z l'équation en x' y' et z' du corps; Az, où l'axe de rotation devient celui des z; on forme ensuite $S.m(x^2+y^2)$, ou, ce qui équivaut, on peut mettre dans $S.m(x^2+y^2)$ pour x et y leurs valeurs en x' y' et z'. Ainsi formons x^2+y^2, multiplions par m, et intégrons; le moment d'inertie T, relatif à un axe quelconque, sera donc

$$T = A\cos^2\eta + C\sin^2\eta + B - 2E\sin\eta\cos\eta\cos^2\theta$$
$$+ (A\sin^2\eta + C\cos^2\eta - B)\sin^2\theta - 2(D\sin\eta + F\cos\eta)\sin\theta\cos\theta;$$

nous faisons ici pour abréger

$$A = S.mx'^2,\ B = S.my'^2,\ C = S.mz'^2$$
$$D = S.mx'y',\ E = S.mx'z',\ F = S.my'z'.$$

A, B, ... sont des constantes, puisqu'elles expriment des intégrales prises dans toute l'étendue du corps, relatives aux trois axes coordonnés. La valeur de T résout complettement le problème proposé (*).

Puisque le moment d'inertie est toujours une grandeur finie et positive, il est évident que parmi tous les axes qui passent par l'origine A, il en est pour lequel ce moment est le plus grand et le plus petit possible. Pour les déterminer, il faut (*Cal. diff.*, Lacroix, 134) égaler séparément à zéro, les différentielles de T, relatives à θ et à η; A, B,... étant constans, puisqu'ils ne dépendent que des axes coordonnés x', y', z'. Désignons par s, s' les sinus, c et c' les cosinus respectifs de η et θ, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}(C-A)scc'-Ec'(c^2-s^2)+(Fs-Dc)s'=0\\(As^2+Cc^2-B+2Esc)s'c'-(Ds+Fc)(c'^2-s'^2)=0\end{array}\right\}\ldots(2).$$

(*) L'axe de rotation, au lieu d'être déterminé par θ et η, peut l'être par les angles α, β et γ qu'il fait avec les axes des x', y' et z' respectivement : il est aisé d'exprimer θ et η en fonction de α, β et γ, en remontant à la note page 21 ; elle donne $\cos\alpha = \sin\eta\cos\theta$, $\cos\beta = \sin\theta$, $\cos\gamma = \cos\theta\cos\eta$, d'où on tire

$$\sin\theta = \cos\beta,\ \cos\theta = \sin\beta,\ \sin\eta = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta},\ \cos\eta = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Or $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; la valeur de T devient donc en substituant et réduisant

$$T = A\sin^2\alpha + B\sin^2\beta + C\sin^2\gamma - 2D\cos\alpha\cos\beta - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\beta\cos\gamma.$$

Ces équations proviennent de $\frac{dT}{d\eta}$ et $\frac{dT}{d\theta}$, divisées respectivement par 2 cos θ et par 2 : or si l'on forme $S.mxz$ et $S.myz$ à l'aide des valeurs (1), on trouvera précisément les mêmes résultats ; donc $S.mxz = 0$, $S.myz = 0$. Pour déterminer les axes qui satisfont à la condition de *maximum* et *minimum* dont il s'agit, il faut tirer des équations (2) les valeurs de η et θ. Pour cela, la première donne $\frac{s'}{c'}$ ou tang θ, et la seconde fait connoître $\frac{2c's'}{c'^2 - s'^2} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \text{tang}\, 2\theta$. Ainsi on a

$$\text{tang}\,\theta = \frac{(C-A)sc-E(c^2-s^2)}{Dc - Fs},\ \text{tang}\,2\theta = \frac{2(Ds+Fc)}{As^2+Cc^2-B+2Esc};$$

d'ailleurs tang $2\theta = \frac{2\,\text{tang}\,\theta}{1-\text{tang}^2\theta}$; en substituant, θ est éliminé, et on a une équation entre c et s qui doit servir à trouver tang η : or cette équation est du 3e. degré (Voy. pag. 303, 6e *Jour. Eco. poly.* Mém. de Prony); et comme l'une des racines est relative au *maximum*, et l'autre au *minimum*, dont l'existence est certaine, il faut en conclure que les trois valeurs de tang θ sont réelles. Ainsi *par chacun des points de tous les corps, on peut faire passer trois* AXES PRINCIPAUX; c'est ainsi qu'on nomme les axes dont la recherche nous occupe. Le 3e. ne répond, il est vrai, ni à un *maximum* ni à un *minimum*, à moins que le moment d'inertie qui lui est relatif ne soit égal à l'un des deux autres; mais il jouit de la propriété de satisfaire aux équations (2).

Supposons qu'il arrive que l'un de ces axes soit celui des z'; la transformation de coordonnées que nous venons de faire aura pareillement lieu, ainsi que les calculs qui en sont la suite ; seulement on devra supposer que les intégrales A, B..... sont prises relativement à trois axes, dont celui des z' est l'axe principal dont il s'agit, et par conséquent faire $S.mx'z' = E = 0$, $S.my'z' = F = 0$. Les formules (2) deviennent alors

$$c\{(C-A)s-D\,\text{tang}\,\theta\}=0,\quad (As^2+Cc^2-B)\text{tang}\,2\theta-2Ds=0.$$

La première donne, ou $c=0$, ou $\text{tang}\,\theta = \frac{(C-A)s}{D}$;

mais celle-ci donne $\text{tang}\,2\theta = \frac{2(C-A)Ds}{D^2-(C-A)^2s^2}$;

valeur qui, introduite dans la seconde (dont le premier facteur équivaut à $(A-C)s^2+C-B$), conduit à $2Ds\{(C-A)(C-B)-D^2\}=0$, d'où $s=0$ et $\theta=0$, ce qui seroit absurde. La première équation exige donc

Fig. 114. que $c=0$, ou $\eta = \frac{1}{2}\pi$; ce qui indique que les projections AB des deux autres axes sur le plan des $x'z'$, se confondent avec Ax', ou que leur plan est perpendiculaire à Az'. De plus $\text{tang}\,2\theta = \frac{2D}{A-B}$ donne deux valeurs de θ qui diffèrent entre elles de $\frac{1}{2}\pi$; donc les deux axes cherchés sont à angle droit. Il résulte de là, 1°. qu'en général *les trois axes principaux sont à angle droit*; 2°. que le moment d'inertie relatif aux x' ou y' est

$$T = C + B\cos^2\theta + A\sin^2\theta - D\sin 2\theta;$$

3°. qu'il sera facile de trouver deux axes principaux lorsqu'on connoîtra le 3e.; 4°. que si on prend les trois axes principaux pour axes coordonnés x', y' et z', les conditions $E=0$, $F=0$, relatives à l'axe des z', ne suffisent plus; il est facile de voir qu'il faut en outre que $\theta=0$ et $=\frac{1}{2}\pi$, ou $D=0$. Le moment d'inertie relatif à un axe quelconque Az est donc alors

$$T = A(\cos^2\eta + \sin^2\eta \sin^2\theta) + C(\sin^2\eta + \cos^2\eta \sin^2\theta) + B\cos^2\theta$$
$$T = A\sin^2\alpha + B\sin^2\beta + C\sin^2\gamma,$$

en traduisant les angles η et θ en fonction de α, β et γ. On peut encore mettre ce moment sous d'autres formes très-commodes, car soient k, l et m les momens d'inertie relativement aux x', y', z', qui sont les axes principaux : on a visiblement $k = B + C$, $l = A + C$, $m = A + B$: d'où tirant les valeurs de A, B et C, qui sont les moitiés respectives de $l + m - k$, $m - l + k$ et $l - m + k$; puis substituant on trouve

$$T = (k\sin^2\eta + m\cos^2\eta)\cos^2\theta + l\sin^2\theta$$
$$T = k\cos^2\alpha + l\cos^2\beta + m\cos^2\gamma.$$

Ainsi lorsqu'on connoît les momens d'inertie d'un corps par rapport aux trois axes principaux, pour obtenir ce moment par rapport à un axe quelconque Az, il suffit de multiplier ceux-là par les carrés des cosinus des angles respectifs formés par cet axe avec les axes principaux.

Rapprochons les principes qui ont été démontrés dans ce paragraphe de ceux qui l'ont été dans le précédent; puisque de deux axes parallèles, celui qui passe par le centre de gravité a un moment Mk^2 plus petit que l'autre de la quantité Mr^2, on conclut que de tous les axes qui passent par le centre de gravité, celui par lequel le moment d'inertie est un *minimum*, jouit de la même propriét[illegible]ment à tous les axes menés dans l'espace.

242. V[illegible] exemples de la recherche du moment d'inertie.

I. Trouver le moment d'inertie d'une droite $AB = a$, Fig. 115.
par rapport à un axe quelconque. Par le centre de gravité G, ou le milieu de AB, concevons un axe parallèle à celui dont il s'agit : $PG = y$ est la distance d'une

molécule quelconque P au point G; $\int(y^2dy)=\frac{1}{3}y^3$ sera donc le moment d'inertie d'une portion de AB; et si on prend l'intégrale depuis $y=AG=-\frac{1}{2}a$ jusqu'à $y=GB=\frac{1}{2}a$, on aura $Mk^2=\frac{a^3}{12}$ pour le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe en G. Mais pour avoir ce moment par rapport à l'axe qui passe en D, il faut (240) y ajouter $a\alpha^2$, α désignant la distance DG entre les deux axes; on aura enfin, pour le moment cherché, $a\left(\alpha^2+\frac{a^2}{12}\right)$.

II. Cherchons le moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle dont les arêtes sont a, b et h, par rapport à l'axe des z passant par le centre de gravité et parallèle à l'arête a. Une molécule de ce corps a pour volume $dxdydz$; le carré de sa distance à l'axe est y^2+x^2. Il faut donc intégrer la quantité $dxdydz\,(y^2+x^2)$ dans toute l'étendue du corps. Opérons d'abord par rapport à x dont les limites sont $x=-\frac{1}{2}h$, et $x=\frac{1}{2}h$; nous aurons $h\left(y^2+\frac{h^2}{3.4}\right)dzdy$: en intégrant de même, de $y=-\frac{1}{2}b$, à $y=\frac{1}{2}b$, on obtient $hb\left(\frac{b^2+h^2}{3.4}\right)dz$. Enfin en intégrant par rapport à z, entre les limites $-\frac{1}{2}a$ et $+\frac{1}{2}a$, on a pour le moment d'inertie cherché

$$Mk^2=abh\left(\frac{b^2+h^2}{3.4}\right)=M\left(\frac{b^2+h^2}{3.4}\right).$$

Fig. 116. III. Soit demandé le moment d'inertie d'un cercle par rapport à un axe perpendiculaire à son plan et mené par le centre C ou en A. Concevons au point n de l'aire qui a $Cp=x$ et $pn=q$ pour coordonnées, un élément rectangulaire $dxdq$; le produit de cet élément par le carré

de sa distance nC au centre C, sera $dxdq\,(q^2+x^2)$; en intégrant par rapport à q seul, on a $\frac{1}{3}q^3dx+qx^2dx$: pour obtenir le moment d'inertie des élémens disposés le long de la double ordonnée mm', il faut prendre cette intégrale depuis $q=-y$, jusqu'à $q=y$, y étant l'ordonnée pm, et par conséquent $=\sqrt{(r^2-x^2)}$, r étant le rayon : on trouve $\frac{2}{3}\sqrt{(r^2-x^2)}\,[r^2+2x^2]\,dx$. En intégrant cette expression depuis $x=-r$, jusqu'à $x=r$, on aura le moment d'inertie de l'aire entière du cercle par rapport au centre C. Pour exécuter cette intégration observons qu'en intégrant par parties on a

$$\int x.2x\sqrt{(r^2-x^2)}.dx=-\frac{2x}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{2}{3}\int(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Or le dernier terme équivaut à $\frac{2}{3}\int(r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}dx$, ou $\frac{2}{3}r^2\int\sqrt{(r^2-x^2)}\,dx-\frac{2}{3}\int x^2\sqrt{(r^2-x^2)}\,dx$; substituant, transportant et réduisant, on a

$$\int 2x^2\sqrt{(r^2-x^2)}dx=-\tfrac{1}{2}x(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}r^2\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}.$$

Nous ne tiendrons pas compte ici du premier terme qui est nul aux limites $-r$ et $+r$, et qui par conséquent disparoît de l'intégrale complette : ainsi, en substituant dans la formule ci-dessus, on trouve pour le moment d'inertie, par rapport à C, $\int r^2\sqrt{(r^2-x^2)}\,dx$: or.... $\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}$ est un segment de demi-cercle, dont x est l'abscisse ; cette intégrale, prise entre les limites $x=-r$ et $x=r$, exprime donc le demi-cercle, c'est-à-dire est $=\frac{1}{2}\pi r^2$, et le moment d'inertie cherché est $\frac{1}{2}\pi r^4=Mk^2$.

On peut aussi raisonner comme il suit : concevons dans notre cercle, une circonférence décrite d'un rayon $=Cn=q$; et une autre circonférence infiniment voisine ; la première aura $2\pi q$ pour longueur, et elles formeront dans le cercle une couronne infiniment mince, dont l'épaisseur sera dq, et dont l'aire sera $2\pi q dq$; en multipliant par $\overline{Cn}^2 = q^2$ on aura $2\pi q^3 dq$ pour le moment d'inertie de cette couronne. En intégrant on a $\frac{1}{2}\pi q^4$ pour le moment d'inertie d'une couronne concentrique d'épaisseur finie, et en prenant l'intégrale depuis $q = 0$ jusqu'à $q = r$, il vient $Mk^2 = \frac{1}{2}\pi r^4$ pour le moment d'inertie de l'aire du cercle.

Soit donc r le rayon d'une poulie, h son épaisseur, $\frac{1}{2}\pi r^4 h$ est son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation; il faut donc remplacer $S(\mu\xi^2)$ par cette valeur dans la formule du n°. 258; ou plutôt par $\frac{1}{2}\pi\delta r^4 h$, δ étant la densité (51), parce que la poulie n'est pas homogène avec les cordons et les masses m et m'.

S'il falloit trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe passant en A, il ne faudroit qu'ajouter à $\frac{1}{2}\pi r^4$, le produit de l'aire πr^2 du cercle par $AC^2 = s$, ce qui donneroit $\pi r^2 (\frac{1}{2} r^2 + s^2)$.

IV. Trouver le moment d'inertie d'une sphère ou d'un segment sphérique, par rapport à son diamètre, ou à un axe quelconque. En un point arbitraire du diamètre, si on conçoit un plan perpendiculaire, il coupera la sphère suivant un cercle, d'un rayon $= y$: ce que nous avons dit ci-dessus fait voir que le moment d'inertie de tous les élémens de ce cercle par rapport à son centre, est $\frac{1}{2}\pi y^4$. Ce rayon y est une ordonnée d'un grand cercle de la sphère; en mettant l'origine à l'extrémité du diamètre, et désignant le rayon de la sphère par a, on a $y^2 = 2ax - x^2$; ainsi le moment d'inertie d'une tranche infiniment mince, est $\frac{1}{2}\pi y^4 dx = \frac{1}{2}\pi(2ax - x^2)^2 dx$ dont l'intégrale est $\pi x^3 (\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2) = Mk^2$. Elle désigne le moment d'inertie d'un segment sphérique. Cette intégrale, prise entre les limites $x = 0$, et $x = 2a$, donne $Mk^2 = \frac{8\pi a^5}{15}$ pour le moment d'inertie de la sphère entière par rapport à son diamètre.

D'après ce qu'on a vu (240), pour obtenir le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, il suffit d'ajouter à ce qu'on vient de trouver le produit de la masse entière du corps, par le carré de la distance n de ce centre à l'axe; on a donc:

1°. Pour le cas du segment sphérique dont le volume est $= \pi x^2 (a - \frac{1}{3}x)$; x désignant la flèche

$$\pi x^2 \left\{ \frac{(2a^2 - n^2)x}{3} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{10} + an^2 \right\}.$$

2°. Pour la sphère dont le volume est $\frac{4}{3}\pi a^3$,

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \left(n^2 + \frac{2a^2}{5}\right).$$

243. Faisons maintenant quelques applications de la théorie des axes principaux et ôtons les accens de x' y' z'.

I. Comptons les z perpendiculairement au plan d'une figure; z sera $=0$, d'où $E=0$, $F=0$: donc *toute figure plane a l'un de ses axes principaux perpendiculaire à son plan :* les deux autres sont situés dans ce plan. S'il s'agit d'une droite AB, elle est elle-même un de ses axes principaux, puisque le moment d'inertie par rapport à AB étant nul, il est un *minimum*, et il y a une infinité de droites perpendiculaires entre elles, et à AB qui sont les deux autres axes principaux : soit l'origine en G. Pour obtenir le moment relativement à un axe OG, qui fait un angle $AGO = \delta$ avec AB, il faut dans $T = k\cos^2\alpha +$ etc., faire $k = 0$, $\gamma = 100°$, $6 = \frac{1}{2}\pi - \delta$, et $l = m = \frac{a^3}{12}$; il vient $T = \frac{a^3 \sin^2\delta}{12}$. Fig. 143.

II. En général, pour déterminer les deux autres axes principaux, il faut déduire de $\tang 2\theta = \frac{2D}{A-B}$ les deux valeurs de θ : la molécule m est ici $= dxdy$; donc $D = S.xydxdy$, quantité qui est $= \frac{1}{2}x^2S.ydy$, ou $= \frac{1}{2}y^2S.xdx$, et qui est nulle par conséquent toutes les fois que les deux limites de x ou de y sont égales et de signes contraires, c'est-à-dire toutes les fois que la courbe est coupée en deux parties symétriques par l'un des axes coordonnés. S'il s'agit d'une ellipse..... $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$; ainsi $A = S.x^2dxdy$, après une première intégration entre les limites de y, devient.. $\frac{2b}{a}S.x^2dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, qui est (242, III) $= \frac{1}{4}\pi a^3b$, depuis $x = -a$ jusqu'à $x = +a$; telle est la valeur de A. Un calcul semblable donne $B = \frac{1}{4}\pi b^3a$; ainsi $\tang 2\theta = 0$, d'où $\theta = 0$, et $\theta = 100°$; donc *les axes mêmes de l'ellipse sont les axes principaux.* S'il s'agissoit cependant d'un cercle, $a = b$ donneroit $\tang 2\theta = \frac{0}{0}$; ce qui annonce qu'il y a une infinité d'axes principaux, qui sont toutes les lignes tracées à angle droit par le centre; résultat d'ailleurs évident.

Le moment d'une ellipse par rapport à un axe mené par le centre et formant un angle δ avec le grand axe, se trouve en faisant $k = B = \frac{1}{4}\pi b^3a$, $l = A = \frac{1}{4}\pi a^3b$, $C = 0$, $\gamma = 100°$, $\alpha = \delta$, dans $T = k\cos^2\alpha +$ etc. : donc $T = \frac{1}{4}\pi(a^2\sin^2\delta + b^2\cos^2\delta)ab$.

III. L'équation générale des surfaces de révolution autour de l'axe des z est $x^2+y^2 = fz$ (Voyez *Anal. géom.* Monge, IV, 3.) : or $xzdxdydz$ intégré d'abord par rapport à x entre les limites $\pm\sqrt{(fz-y^2)}$ est nul; d'où $E = 0$. Il est clair que la même chose auroit lieu pour toute surface symétrique de part et d'autre du plan

yz. On a aussi $F=0$, qui offre la même conséquence pour le plan xz. L'axe des z et deux droites rectangulaires tracées dans le plan xy sont donc les trois axes principaux : pour les déterminer, cherchons A; B et D. Une première intégration de $y^2dxdydz$ relative à x entre les limites $\pm\sqrt{(fz-y^2)}$ donne $2y^2\sqrt{(fz-y^2)}\,dydz$: pour un z déterminé on a un cercle dont le rayon est $\sqrt{(x^2+y^2)}$ ou $\pm\sqrt{(fz)}$; ainsi l'intégrale relative à y entre ces deux limites (242, III) est $=\frac{1}{4}\pi\,(fz)^2\,dz$: en intégrant enfin depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de z, on aura B; mais ce calcul ne peut être poussé plus loin sans connoître fz. Comme on trouvera de même $A=\frac{1}{4}\pi S\,(fz)^2\,dz$ entre les mêmes limites, et que $D=0$, on a tang $2\theta=\frac{0}{0}$; on a donc la même conséquence que pour le cercle; ce qui résulte évidemment de ce que toutes les sections parallèles aux xy sont circulaires : on trouve de même $C=\pi S.fz.z^2dz$.

S'il s'agit d'un cylindre dont $2h$ est la hauteur, r le rayon de la base, et dont l'origine est au milieu de l'axe, $fz=r^2$; d'où $A=B=\frac{1}{2}\pi r^4h$ et $C=\frac{2}{3}\pi r^2h^3$. $A+C=$ le moment par rapport à l'axe des x ou des $y=\pi r^2h\,(\frac{1}{2}r^2+\frac{2}{3}h^2)$; C est celui relatif aux z. Il sera donc aisé d'avoir celui relatif à une droite quelconque. En égalant A à C, on trouve que les momens par rapport à tous les axes qui passent par le centre de gravité sont égaux pour le cylindre qui est tel que $3r^2=4h^2$.

S'il est question d'un segment de paraboloïde dont l'origine est au sommet, et la hauteur h, $fz=2pz$, et on trouve $A=\frac{1}{3}\pi p^2h^3=B$, $C=\frac{1}{2}\pi ph^4$.

Pour le cône dont la hauteur est h et l'origine au sommet, $fz=m^2z^2$, m étant la tangente du demi-angle au sommet, on a $A=B=\dfrac{\pi h}{4.5}.m^4h^4$; $C=\dfrac{\pi h}{5}.m^2h^4$.

VI. *Mouvement d'un corps choqué retenu par un axe fixe.*

Fig. 117. 244. Concevons un corps dont la masse M et la forme soient connus, qui soit retenu par un axe fixe perpendiculaire en A au plan de la figure : supposons que ce corps reçoit une impulsion produite par le choc d'un corps dont la masse est μ et la vîtesse u; cette impulsion ayant d'ailleurs sa direction BC perpendiculaire à un plan AB mené par l'axe fixe : s'il n'en étoit pas ainsi, il faudroit décomposer l'impulsion μu en deux autres, l'une parallèle à l'axe, l'autre perpendiculaire à celle-ci; la première seroit détruite, puisqu'on suppose le corps retenu en deux de ses points. Cherchons les circonstances du mouvement de rotation qui s'établira.

Par l'effet de l'impulsion, la molécule m' décrira un cercle dont le rayon est $Am' = \rho'$, et par conséquent, sa vîtesse sera $\rho' \varkappa$, en désignant par $\varkappa$ la *vîtesse angulaire*, le mouvement de m' aura pour direction la droite $m'D$ perpendiculaire à Am'; $\rho'' \varkappa$ sera de même la vîtesse de m'' : et ainsi de suite. Supposons que le corps choquant soit anéanti aussitôt après le choc; et que la perpendiculaire $AB = \varepsilon$. Nous ferons ici usage du principe de d'Alembert, et nous aurons

masses.	v. imprim.	v. effectives.	dist. à l'axe.
μ	u	o	ε.
m'	o	$\rho' \varkappa$	ρ'.
m''	o	$\rho'' \varkappa$	ρ''.
etc	....	....	....

L'équilibre entre les forces imprimées, et celles qui ont lieu prises en sens opposé, devant s'établir autour de l'axe fixe, on sait (42) qu'il faut que la somme des momens, par rapport à cet axe, des quantités de mouvement, soit nulle. Ainsi on a

$\mu u \varepsilon - m'\rho'^2 z - m''\rho''^2 z - \text{etc.} = 0$, d'où $z = \dfrac{\mu \varepsilon u}{S.\rho^2 m}$.

Soit G le centre de gravité du corps, faisons $AG = X$), nous avons vu (240, 1°) qu'on avoit $S(\rho^2 m) = M(X^2 + k^2)$, Mk^2 étant le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe qui passeroit par le centre de gravité, et seroit parallèle à l'axe fixe : donc on a

$$z = \frac{\mu u \varepsilon}{M(X^2 + k^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (k''),$$

expression qui équivaut à la précédente, et qui résout le problème proposé.

245. Les efforts qu'éprouve l'axe fixe sont essentiels à déterminer : soit donc pris cet axe pour celui des z et l'axe des y parallèle à l'impulsion μu, de sorte qu'elle exerce son effet perpendiculairement au plan xz en un point dont ε et ζ soient les coordonnées. Au lieu de regarder l'axe des z comme fixe, introduisons des forces propres à le retenir ; on peut les concevoir réduites (p. 57) à deux P et Q parallèles l'une aux x et dont le z soit $= a$, l'autre aux y et dont le $z = b$: P et Q sont les pressions cherchées.

La molécule m' décrit un cercle de rayon ρ' et parallèle au plan xy ; sa vîtesse $\rho' z$ est tangente à ce cercle, de sorte que le sinus et le cosinus de l'angle que sa direction fait avec les x sont $\dfrac{x'}{\rho'}$ et $\dfrac{y'}{\rho'}$: il en est de même des autres molécules. L'équilibre devant avoir lieu entre les forces effectives et les forces imprimées prises en sens contraire ; il faut recourir aux équations (X et Y, pag. 52), on formera le tableau suivant dans lequel les signes sont déterminés d'après le sens où les forces agissent.

Forces.	Comp. dirigées suivant les x.	les y.	les z.	Coord. d'appl. suiv. les x.	les y.	les z.
μu ...	o	... μu	... o ...	ι ...	o ...	ζ
$-P$ ...	$-P$	... o	... o ...	o ...	o ...	a
$-Q$ ...	o	... $-Q$	... o ...	o ...	o ...	b
$m'\rho'\varepsilon$ ...	$-m'y'\varepsilon$	... $m'x'\varepsilon$	... o ...	x' ...	y' ...	z'
$m''\rho''\varepsilon$ ...	$-m''y''\varepsilon$	... $m''x''\varepsilon$	... o ...	x'' ...	y'' ...	z''
etc. ...						

Soient donc M la masse du corps; X, Y, Z les coordonnées de son centre de gravité, nous aurons en vertu des équations (A', 54)

$$\varepsilon.MY+P=0,\quad \varepsilon.MX=\mu u+Q,\quad \varepsilon.Sm\rho^2=\mu\iota u,$$
$$\varepsilon.S.myz+Pa=0,\quad \varepsilon.S.mxz=Qb+\mu u\zeta.$$

La troisième donne pour la vîtesse angulaire ε la relation (k'') : les quatre autres font connoître les efforts P et Q et leurs points d'application ; ce qui résout le problême d'une manière complette.

Si on vouloit que l'impulsion fut telle qu'il n'en résultât pas de pression sur l'axe suivant les x ou les y, il faudroit supposer $P=0$, ou $Q=0$: et pour que ces deux conditions aient lieu à-la-fois, il faut que

$$Y=0,\quad \varepsilon.MX=\mu u,\quad \varepsilon.S.m\rho^2=\mu\iota u.$$
$$S.myz=0,\quad S.mxz=MX\zeta.$$

La première indique que le centre de gravité est situé dans le plan xz auquel l'impulsion μu est perpendiculaire : la seconde donne ε ; la troisième prend la forme

$$\iota=\frac{S.m\rho^2}{MX}=\frac{X^2+k^2}{X}=X+\frac{k^2}{X}\;\ldots\ldots(l^4),$$

En désignant le moment d'inertie par $M(X^2+k^2)$, (240) : la dernière détermine ζ, de sorte qu'on connoît les coordonnées ε et ζ du point du plan xz où l'impulsion μu doit être communiquée ; c'est ce qu'on nomme le *centre de percussion*, qu'on doit définir *le point auquel il faut que le choc soit imprimé perpendiculairement au plan qui passe par l'axe et par le centre de gravité, pour que cet axe n'éprouve aucun effort*. Quant à l'équation $S.myz = 0$, elle exprime une relation qui dépend de la figure du corps et de la liaison à l'axe ; et comme elle n'aura lieu que dans des cas particuliers (pag. 340), on voit que dans tout corps fixé à un axe, il n'y a pas nécessairement un centre de percussion. Supposons que l'axe de rotation soit parallèle à un axe principal passant par le centre de gravité ; comme pour transporter l'origine et faire en sorte que l'axe des x passe par ce centre, il faut faire simplement $x = X + x'$, et qu'alors on a (241), ... $S.mx'z = 0$, on voit que $S.mxz = X.S.mz$, d'où $\zeta = Z$; l'impulsion μu seroit alors donnée à la ligne menée du centre de gravité perpendiculairement à l'axe fixe. Si on veut simplement exprimer que les efforts exercés sur les axes sont égaux et dirigés en sens contraires, il faut poser que (38) les coordonnées a et b sont infinies ; ce qui exige qu'on n'ait plus $S.myz = 0$, $S.mxz = MX\zeta$. Alors le problême sera toujours possible, et même d'une infinité de manières, puisque ζ reste indéterminé : tous les points de la parallèle à l'axe, menée dans le plan xz, à la distance ε de cet axe satisfont à la condition exigée.

Soit V la vîtesse du centre de gravité du corps, on a $\nu X = V$; supposons en outre que les masses M et μ soient égales, ainsi que les vîtesses V et u, la formule (k'') donnera pour ε la valeur (l'') ; ce qui indique que *si on applique au centre de percussion d'un corps une quantité de mouvement* *égale et opposée à celle de son centre de gravité, le mouvement sera détruit.* Quand le corps est fixé à un axe, on voit que c'est au centre de percussion qu'il faut appliquer la force MV pour le réduire au repos ; ainsi c'est par ce point que passe la résultante des forces dont chaque particule du corps est animée. On peut donc concentrer par la pensée le corps au centre de percussion ; et ce point remplace ici le centre de gravité dont il offre une des propriétés de statique.

Fig. 117. 246. La force μu agissoit précédemment sur le corps M supposé en repos ; généralisons notre théorie et supposons que ce corps soit déja animé d'une vîtesse angulaire ϖ' et que la force μu soit dirigée dans le sens de cette vîtesse : laissons d'ailleurs les choses dans le même état qu'au n°. 244. Au moment du choc, on peut regarder la masse M comme entraînée par celle μ qui la choque, et formant avec elle un seul et même corps : cela n'aura lieu, il est vrai, que pendant un instant, durant lequel le corps μ aura pour vîtesse absolue $\varepsilon\varpi$, qui est celle que prend le point B du corps choqué M. En raisonnant comme précédemment on voit qu'on a

masses.	v. imprim.	v. effectives.	dist. à l'axe.
μ	u	$\varpi\varepsilon$	ε
m'	$\varpi'\rho'$	$\varpi\rho'$	ρ'
m''	$\varpi'\rho''$	$\varpi\rho''$	ρ''
etc.			

et on trouve pour la vîtesse angulaire après le choc, à cause de $S(\rho^2 m) = M(a^2 + k^2)$,

$$\varpi = \frac{\mu u\varepsilon + \varpi' M(X^2 + k^2)}{\mu\varepsilon^2 + M(X^2 + k^2)}.$$

Si on fait $\varpi' = 0$, on a le cas où le corps M seroit en repos avant le choc. Celui où le corps μ se mouvroit en sens opposé de M s'obtient en rendant u' négatif. Enfin si on fait $u=0$ et u' négatif, on a le cas où le corps M viendroit choquer la masse μ supposée en repos : alors, en prenant les vîtesses positives dans le sens de u', et supposant qu'aussitôt après le choc un obstacle arrête subitement le corps choquant M, on a pour la vîtesse absolue v de μ,

$$v=\iota u=\frac{\iota u' M(X^2+k^2)}{\mu\iota^2+M(X^2+k^2)}.$$

Cette expression devient nulle lorsque $\iota=0$ et lorsque $\iota=\infty$: entre ces deux valeurs de ι, il y en a une pour laquelle la vîtesse v est un maximum ; on l'obtient en faisant $\frac{dv}{d\iota}=0$, ce qui donne

$$\iota=\sqrt{\left[\frac{M}{\mu}(X^2+k^2)\right]},\ \text{et}\ u=\tfrac{1}{2}u',$$

La vîtesse v du corps choqué est alors $v=\iota u=\frac{1}{2}\iota u'$. On voit par là que ce n'est que dans le cas particulier où $\frac{M}{\mu}=\frac{X^2+k^2}{X^2}$ que le centre de percussion est le point qui jouit de la propriété de communiquer le maximum de vîtesse.

VII. *Mouvement angulaire varié ; Pendule composé.*

247. Jusqu'à présent le corps retenu par un axe fixe, n'étoit soumis qu'à l'action d'une ou plusieurs forces impulsives : voyons ce qui arriveroit, si chaque molécule de ce corps étoit sollicitée par une force accélératrice particulière. Considérons le corps M dont les molécules $m', m'', \ldots\ldots$

sont sollicitées par les forces φ', φ'', ... connues en grandeur et en directions, et supposées dans des plans perpendiculaires à l'axe, dont elles sont distantes de p', p''... soient ρ', ρ'', ... les distances de ces molécules à l'axe. Soit enfin ω la vitesse angulaire du corps au bout du tems t, vitesse qui devra s'accroître de $d\omega$ dans l'instant dt suivant.

Fig. 128. Cela posé, on voit que la molécule m', par exemple, reçoit dans les directions $m'D$ et $m'H$, deux impulsions $\omega\rho'$ et $\varphi'dt$, mais que par la liaison du système ces impulsions ne produisent pas tout leur effet, et que la vîtesse que la molécule m' prendra réellement suivant $m'D$ sera $\rho'(\omega + d\omega)$: on aura d'ailleurs $Am' = \rho'$, et $AH = p'$. On en dira autant des autres molécules; et on aura

masses. v. impr. dist. à l'axe. v. effectives. dist. à l'axe.

$$m' \ldots \left\{\begin{array}{l} \rho'\omega \;\ldots\; \rho' \\ \varphi' dt \;\ldots\; p' \end{array}\right\} \ldots\ldots \rho'(\omega + d\omega) \ldots\ldots \rho'$$

$$m'' \ldots \left\{\begin{array}{l} \rho''\omega \;\ldots\; \rho'' \\ \varphi'' dt \;\ldots\; p'' \end{array}\right\} \ldots\ldots \rho''(\omega + d\omega) \ldots\ldots \rho''$$

etc...

L'équilibre entre les forces qui ont lieu prises en sens contraire et les forces imprimées devant être établi à l'aide de l'axe fixe, on doit exprimer (45) que la somme des momens de toutes ces forces, par rapport à cet axe, est nulle, ce qui donne

$$(m'\varphi'p' + m''\varphi''p'' + \text{etc.})\,dt = (m'\rho'^2 + m''\rho''^2 + \text{etc.})\,d\omega;$$

$$\text{donc} \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{S(\varphi p m)}{S(\rho^2 m)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (m'').$$

Il résulte de là que *la force accélératrice angulaire* *est le quotient de la somme des momens des forces motrices divisée par le moment d'inertie.* S désigne des intégrations faites dans toute l'étendue du corps et indépendantes du tems, aussi bien que de toute notion de mouvement; elles ne se rapportent qu'aux propriétés géométriques du corps; de sorte que quoique φ puisse être dans quelques cas une fonction de x, y, z et t, relativement au signe S, le tems t doit être regardé comme constant : du reste, voici l'usage de cette équation. Après voir trouvé les valeurs de $S(\rho^2 m) = M(a^2 + k^2)$ et de $S(\varphi p m)$ en fonction de t, on intégrera par rapport aux variables t et u; on obtiendra ainsi la vîtesse absolue u d'un point situé à la distance 1 de l'axe fixe, et par conséquent celle de tous les autres points du corps (211). Ce premier point décrit un arc que nous désignerons par α, à partir d'un instant déterminé, (par exemple depuis le moment où on avoit $t = 0$); on a $u = \frac{d\alpha}{dt}$. En intégrant de nouveau, on obtiendra α en fonction de t, et par conséquent on aura tout ce qui peut intéresser dans le mouvement gyratoire du corps. Les constantes introduites dans ces intégrations dépendent des valeurs initiales de la vîtesse u et de l'arc α; elles se détermineront comme précédemment (153, 167).

248. Appliquons ces principes au *Pendule composé* : concevons un corps M, de figure déterminée, retenu par un axe fixe A, et dont toutes les molécules soient sollicitées par la gravité; soit Mq la coupe de ce corps par un plan vertical passant par le centre de gravité I, et perpendiculaire à l'axe de rotation projetté en A : le corps est retenu à cet axe par une verge inflexible IA, dénuée d'inertie, et dirigée au centre de gravité; An est la position initiale de cette verge, qui est supposée parvenue en AM au bout du tems t. Menons la verticale Fig. 119.

(*d*) et faisons $MAB = \theta$, $mAB = f$, $mAM = \alpha$, et $AI = r$. Comme la gravité g est la force accélératrice qui sollicite toutes les molécules, on peut sortir g du signe S, et la formule (m'') devient $\frac{du}{dt} = \frac{gS(\rho m)}{S(\rho^2 m)}$. Or on peut ($z''$) remplacer le moment d'inertie $S(\rho^2 m)$ par $M(r^2 + k^2)$, M étant la masse du corps oscillant : par la théorie des centres de gravité (54), en prenant les momens relativement à un plan vertical AB mené par l'axe A, on a $M \times IP = m'p' + m''p'' + \text{etc.} = S(mp)$: d'ailleurs $IP = r \sin \theta$; donc on a $S(mp) = rM \sin \theta$, et la formule (m'') devient enfin $\frac{du}{dt} = \frac{rg \sin \theta}{r^2 + k^2}$.

Pour intégrer cette équation, observons que $u\,dt = d\alpha$, mais $\alpha = f - \theta$; donc $u\,dt = -d\theta$; multipliant cette équation par la première, on a $u\,du = -\frac{rg}{r^2 + k^2} \times \sin \theta\, d\theta$, dont l'intégrale est $u^2 = \frac{2rg}{r^2 + k^2}(\cos \theta + C)$; et comme $\theta = f$ doit donner $u = 0$, on a $C = -\cos f$; donc enfin

$$u = \sqrt{\left\{\frac{2gr}{r^2 + k^2}(\cos \theta - \cos f)\right\}} \ldots\ldots\ldots (n'').$$

249. Les divers points matériels qui composent le pendule ont des vîtesses différentes de celles qu'ils auroient s'ils étoient libres, ainsi qu'on peut s'en convaincre en comparant la vitesse de l'un d'eux à celle qu'il auroit dans cette hypothèse, à l'aide de la formule précédente et de celle (t', 197), qu'on déduit aussi de (n'') en y faisant $k = 0$. Ainsi la liaison de ces points entre eux les force d'exercer une action mutuelle qui altère leurs vîtesses propres : celle des uns est plus grande, celle des autres est moindre que s'ils étoient seuls. Il est donc aisé de

prévoir qu'il y a quelque part sur la ligne *AI* un point q dont la vîtesse n'est point altérée, et qui se meut comme s'il étoit seul. On a donné à ce point le nom de *Centre d'Oscillation*. Voici comment on peut se convaincre de l'existence de ce point. Soit $Aq = \iota$; au bout du tems t, la formule (t' ou n'') fait voir que si ce point étoit seul, il auroit pour vîtesse absolue,

$$\iota u = \sqrt{[2g\iota(\cos\theta - \cos f)]}.$$

Mais comme ce point fait d'ailleurs partie du corps, on peut aisément trouver sa vîtesse ιu à l'aide de l'équation (n'') : en égalant ces deux valeurs, on trouve

$$\iota = \frac{r^2 + k^2}{r} = r + \frac{k^2}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots (o'').$$

Cette équation sert à déterminer la longueur ι d'un pendule simple qui feroit ses oscillations dans le même tems que le pendule composé dont il s'agit : car si on conçoit toute la masse de celui-ci réunie au centre d'oscillation, on n'aura plus à considérer qu'un pendule simple dont les oscillations seront *synchrones* (*) avec les premières, c'est-à-dire d'égale durée : on peut donc appliquer ici tout ce qui a été dit chap. II, art. VI, p. 270.

Nous avons prouvé (156) que dans le vide la chûte des corps graves se faisoit d'un mouvement uniformément varié; maintenant il est facile de s'assurer que la gravité ne varie pas pour les divers corps, à la manière des attractions chimiques. Il suffit pour cela de faire osciller des corps de nature différente, de les réduire par le calcul à des pendules simples, et de voir si leurs longueurs

(*) Σὺν, ensemble; Χρόνος, tems.

sont entre elles en raison inverse des carrés des nombres d'oscillations faites dans le même tems (195, 3°.) : car la plus légère différence entre les actions de la pesanteur seroit rendue considérable dans ces expériences. Newton les a faites avec le plus grand soin ; on les a répétées souvent depuis, et tout a prouvé que la force qui pousse les corps vers la terre a la même intensité pour tous, qu'elle que soit leur masse et leur nature, et que par conséquent le poids est proportionnel à la masse (50, 221).

250. De l'équation (o'') on conclut que :

1°. Le centre d'oscillation est le même que le centre de percussion ; c'est celui où on peut réunir toute la masse du corps en mouvement autour de l'axe (245) : ce point est sur la ligne qui joint l'axe au centre de gravité, et il est plus éloigné de l'axe que celui-ci de la quantité $qI = \frac{k^2}{r}$. Cette valeur devient infinie lorsque l'axe de rotation passe par le centre de gravité : ce qui signifie, que le tems d'une oscillation est infini dans ce cas ; et en effet, comme alors la gravité est détruite, l'impulsion communiquant au corps un mouvement gyratoire sans fin, il n'y a point d'oscillations.

2°. Désignons par s la distance qI entre les centres de gravité et d'oscillation, $s = \frac{k^2}{r}$ donne $r = \frac{k^2}{s}$: or si l'axe de rotation étoit situé au point q, la même formule (o'') donne $\frac{k^2}{s}$ pour la distance qui sépareroit le centre de gravité I du nouveau centre d'oscillation : cette distance étant $= r$, on voit que celui-ci seroit situé en A ; donc *le centre d'oscillation et le point de suspension sont réciproques l'un de l'autre.*

3°. Puisque (o'') ne dépend que de r, il est visible que les valeurs de ε, et par conséquent *les tems des oscillations d'un corps déterminé, sont les mêmes pour des centres de suspension, pris à égale distance du centre de gravité.* Il est aisé de conclure de là que si dans le plan mené par le centre de gravité perpendiculairement à l'axe de rotation, on trace de ce centre et avec les rayons r et ε deux cercles ; le premier sera la base d'un cylindre droit dont toutes les génératrices sont des axes de suspension synchrones : la seconde circonférence est le lieu de tous les centres d'oscillation correspondans ; c'est le théorême d'Huyghens. Mais de plus, si on a égard à la réciprocité des centres d'oscillation et de suspension, la seconde circonférence sera de même la base d'un cylindre droit dont les génératrices seront aussi des axes synchrones.

Si maintenant on changeoit la direction de l'axe de rotation, on trouveroit un autre système d'axes qui jouiroient de la même propriété : de sorte que ces différens systêmes sont tangens à deux sphères concentriques autour du centre de gravité. On conclut de là qu'*il existe dans tout corps solide une infinité d'axes autour desquels les oscillations sont synchrones*, c'est-à-dire d'égale durée. Nous n'ajouterons rien de plus sur cette matière. Consultez à cet égard un mémoire de Biot, pag. 242 du 13ᵉ. cahier du *Jour. de l'Ec. polyt.*

251. Appliquons maintenant la formule (o'') à la recherche de la position du centre d'oscillation ou de percussion d'un corps de figure connue.

1°. Commençons par la sphère dont a est le rayon et $M = \frac{4}{3}\pi a^3$ le volume ; son moment d'inertie (242, IV) par rapport au diamètre est $Mk^2 = \dfrac{8\pi a^5}{15}$, donc.....

$k^2 = \dfrac{2}{5}a^2$; la formule (o'') devient donc $\varepsilon = r + \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{a^2}{r}$, d'où $s = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{r}$. Si l'axe de suspension étoit tange à la sphère, comme r seroit $= a$, on auroit $s = \frac{2}{5}\,a$. E si on avoit le diamètre pour axe, s seroit $= \infty$, ce qui es d'ailleurs évident (250, 1°.).

2°. S'il s'agit d'un segment de sphère, en faisant l flèche $= x$, on sait que $M = \pi(a - \frac{1}{3}x)\,x^2$; d'ailleur on a (242, IV) pour le moment d'inertie............ $Mk^2 = \pi x^3(\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2)$; donc

$$s = \frac{k^2}{r} = \frac{(\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2)\,x}{r(a - \frac{1}{3}x)}.$$

Les pendules de nos horloges sont ordinairement composés de deux segmens accolés par les cercles de leurs bases : la formule précédente est visiblement la même pour un segment que pour deux ; mais l'emploi en seroit plus commode, si au lieu d'être en fonction du rayon a de la sphère, elle renfermoit le rayon b du cercle de la base. Or on a visiblement $b^2 = 2ax - x^2$, d'où $a = \frac{x^2 + b^2}{2x}$, en substituant on trouve

$$s = \frac{k^2}{r} = \frac{b^4 + \frac{1}{2}b^2x^2 + \frac{1}{10}x^4}{r(3b^2 + x^2)}.$$

En ajoutant r à cette valeur, on auroit la distance ε de l'axe de suspension au centre d'oscillation.

3°. De même pour un parallélipipède rectangle dont les côtés sont a, b et h, qui oscille autour d'une ligne parallèle à l'arête a, menée par le point de son axe qui est distant de r de son centre de gravité, on a (242, II) $k^2 = \frac{b^2 + h^2}{3.4}$; d'où $s = \frac{k^2}{r} = \frac{b^2 + h^2}{3.4\,r}$. Si l'axe de rotation étoit placé à la base supérieure du parallélipipède, on auroit $r = \frac{1}{2} h$, d'où $\varepsilon = \frac{4h^2 + b^2}{6h}$.

252. Quelquefois plusieurs corps liés ensemble oscillent autour d'un même axe; voyons comment on peut déterminer la position du centre d'oscillation de leur systême. Soient r', r''.... ε', ε''... les distances de l'axe de rotation aux centres de gravité et d'oscillation de ces corps; M', M''... leurs masses : la distance ε de l'axe de rotation au centre d'oscillation du systême est le quotient du moment d'inertie divisé par le produit $(M' + M'' + \text{etc.})\, r$ de la masse par la distance r du centre de gravité du systême à ce même axe. Or supposons que tous les corps ont leurs centres de gravité dans le même plan vertical mené par l'axe, ce produit est donné par les formules (A', 54); il est $= M'r' + M''r'' +$ etc. De plus pour le centre d'oscillation du corps M', on a cette même formule $\varepsilon' = \frac{r'^2 + k'^2}{r'}$; donc son moment d'inertie est $M'r'\varepsilon'$; le moment d'inertie du systême, ou la somme des momens d'inertie de tous les corps qui le composent, est $M'r'\varepsilon' + M''r''\varepsilon'' +$ etc.; donc enfin on a

$$\varepsilon = \frac{M'r'\varepsilon' + M''r''\varepsilon'' + \text{etc.}}{M'r' + M''r'' + \text{etc.}} \ldots\ldots\ldots (p'').$$

VIII. *Théorie de la Percussion, en ayant égard à la figure des corps.*

253. Dans l'article I, nous n'avons examiné les phénomènes de la percussion qu'en supposant l'un des corps retenu par un axe fixe; il convient de généraliser notre théorie, et de supposer les corps parfaitement libres.

Soit d'abord un système de points matériels m', m''... libres, et point liés entre eux, animés de vîtesses parallèles V', V''.... cherchons quel sera le mouvement du centre de gravité de ce système.

Faisons passer par ce centre un plan parallèle aux directions des impulsions; comme dans l'origine du mouvement, la somme des momens de m', m''... par rapport à ce plan (55) est nulle; il est clair qu'elle sera encore nulle dans la suite, puisque ces corps conservent leurs distances respectives à ce plan; ainsi le centre de gravité est constamment dans ce plan : et comme on peut en dire autant de tout autre plan parallèle aux impulsions et passant par ce centre, il s'ensuit que le *centre de gravité décrit une droite parallèle aux vîtesses imprimées.*

Concevons un plan perpendiculaire aux directions des vîtesses, et désignons par E', E''.... les distances de m', m''.... à ce plan au commencement du mouvement; au bout du tems t leurs distances seront $E'+V't$, $E''+V''t$.... (a, 144); prenons les momens par rapport à ce plan; X, x étant les distances du centre de gravité à ce plan, à l'origine du mouvement et au bout du tems t, on aura (54) les équations

$$(m'+m''+\text{etc.})X=m'E'+m''E''+\text{etc.}$$
$$(m'+m''+\text{etc.})x=m'(E'+V't)+m''(E''+V''t)+\text{etc.}$$

On obtient, en soustrayant la première de la seconde,

$$(m'+m''+\text{etc.})(x-X)=(m'V'+m''V''+\text{etc.})t;$$

ce qui fait voir que l'espace $x-X$ parcouru par le centre de gravité est proportionnel au tems : ainsi *son mouvement est uniforme.* On ne doit point oublier de prendre négativement les vîtesses qui sont dirigées en sens contraire de celles qu'on regarde comme positives.

Concevons au centre de gravité une masse égale à la somme des masses du systême; notre équation prouve que sa quantité de mouvement est $m'V' + m''V'' +$ etc.; donc *la quantité de mouvement qu'auroit le centre de gravité, si on concevoit toutes les masses concentrées en ce point, seroit égale à la somme de celles des corps.*

Ainsi *le centre de gravité se meut avec la même vîtesse que si toutes les impulsions lui eussent été immédiatement imprimées*, ou, si on veut, *le centre de gravité se meut comme si toutes les masses du systême y étoient concentrées, et que toutes les forces lui fussent appliquées, en les transportant parallèlement à leurs directions.*

Si ces vîtesses imprimées avoient des directions différentes, la même chose auroit encore lieu. Car décomposons chacune d'elles en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires : en vertu de chacun de ces groupes, le centre de gravité sera mu parallèlement à chaque axe, comme si ces forces lui étoient immédiatement appliquées, puisqu'on peut faire pour chacun d'eux le raisonnement précédent; et à cause de l'indépendance des effets des forces de directions rectangulaires (146, 5°.), l'action simultanée de ces trois groupes de forces n'altérera en rien ce mouvement dans le sens de chacun des axes.

254. Faisons voir maintenant que lorsque les corps sont liés entre eux d'une manière quelconque, la proposition ci-dessus est également vraie. Pour cela soient P', P''... les forces qui agissent sur ces corps : décomposons chacune d'elles en deux autres; l'une qui ait lieu, et l'autre qui soit détruite : de sorte que F', F''... soient les forces qui doivent produire tout leur effet, d'après la nature du systême; et que f', f''.... soient celles qui se trouvent détruites par l'action mutuelle de ses parties : F' et f' sont

d'ailleurs les composantes de P'', et ainsi des autres. En vertu des forces F', F''...... le corps devra se mouvoir sans qu'il y ait de force perdue; c'est-à-dire que si on ne supposoit que ces puissances agissantes sur le système, il seroit indifférent d'en regarder les parties comme liées entre elles, ou comme parfaitement libres.

Il résulte de là, et de ce qu'on a vu ci-dessus, que le centre de gravité du système devra se mouvoir comme si les forces F', F''...... lui étoient immédiatement appliquées, en les transportant parallèlement à leurs directions. Quant aux forces f', f''...... elles se détruisent mutuellement lorsqu'elles agissent sur les parties du système, et satisfont par conséquent aux six équations (X et Y, 47); donc, à plus forte raison, elles doivent se détruire en les transportant au centre de gravité, puisqu'alors les équations (X ou Y, 24) suffisent pour l'équilibre. Ce centre est donc sollicité à-la-fois par les forces F', F''.... et f', f''.... ou, ce qui revient au même, par les puissances P', P''.... ce qui démontre le théorème ci-dessus.

255. Lorsqu'on donne à un corps une impulsion P qui ne passe pas par le centre de gravité G, ce centre prend donc le même mouvement de translation que si la force agissoit immédiatement sur lui. Mais le corps doit en outre tourner; en effet, pour réduire au repos le centre de gravité G, appliquons-y une nouvelle force Q égale et opposée à P; il suit de ce qu'on a démontré que cela n'a lieu que pour le centre de gravité G. Abaissons une perpendiculaire AG sur la force P, et prenons de l'autre côté de ce centre $GB = AG$. Concevons que le point B est sollicité par deux forces opposées R et S égales entre elles et à $\frac{1}{2}P$: l'état du corps ne sera point changé. Mais en composant la puissance S et la moitié de la force P, on obtient une force $T = P$ qui détruit Q; il ne restera

plus que les forces R et $\frac{1}{2}P$ égales, et une nouvelle force Q égale et opposée; et comme le centre de gravité est fixe, on peut assimiler le corps à une poulie et transporter la force R en AP, c'est-à-dire rétablir en entier la puissance P. Ainsi l'effet de la force Q est uniquement d'arrêter le mouvement de translation du centre de gravité.

Il suit de là que *lorsqu'un corps est mu par des forces dont la résultante ne passe pas par le centre de gravité, ce corps a un double mouvement*, 1°. *il tourne autour de ce centre comme s'il étoit absolument fixe;* 2°. *ce centre se meut comme si les forces lui étoient immédiatement appliquées.*

256. Rien ne sera donc plus facile que de trouver le mouvement d'un corps symétrique par rapport à un plan, ou d'une surface plane mue par une impulsion dirigée dans ce plan, car la translation du centre de gravité rentrera dans la théorie connue, puisqu'il ne s'agira que du mouvement d'un point; et la rotation étant la même que s'il y avoit un axe fixe, on n'aura plus qu'à appliquer ce qui a été dit à ce sujet (244). Soit P la quantité de mouvement imprimée, ε sa distance OG au centre de gravité du corps M; on aura (255) pour la vîtesse de translation du centre de gravité $v = \frac{P}{M}$. La vîtesse angulaire sera donnée par la formule (k''); mais comme l'axe fixe passe ici par le centre de gravité du corps, le moment d'inertie se réduit à Mk^2, et on a Fig. 121.

$$u = \frac{P\varepsilon}{Mk^2} = \frac{v\varepsilon}{k^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (q'').$$

La vîtesse absolue de chaque point du corps se compose d'ailleurs de ces deux vîtesses; ainsi le point O, où la perpendiculaire abaissée du centre de gravité G Fig. 121.

sur la direction de la force P rencontre cette force, prend deux vitesses; l'une Oi que devra recevoir le centre de gravité G, et l'autre ih qui est due à la rotation. Tout autre point de OG offre la même circonstance : de sorte qu'en prenant celui qui est distant du point G de la quantité b, il a pour vitesse absolue $v \pm b\omega$; le signe $+$ a lieu pour tous les points situés de G vers O, le signe $-$ a lieu pour tous ceux qui sont placés de G vers C.

Concevons l'effet de ce double mouvement pendant un instant; la ligne Oih pourra être considérée comme droite et décrite par le point O, dans le tems où le centre de gravité G passe en g : la droite OG prendra la position hgC, de sorte que le point C n'aura pas changé de place; en effet, il auroit dû passer de C en C' en vertu de la translation, et revenir de C' en C par l'effet de la rotation. Ce point C a été nommé *Centre spontané de rotation*. Il est facile d'en connoître la position; car il est déterminé par la condition que sa vitesse absolue $v - b\omega$ soit nulle, ce qui donne $b = \frac{v}{\omega}$, ou plutôt $b = \frac{k^2}{\varepsilon}$, à cause de la formule (q''). Or, $OC = OG + GC = \varepsilon + b$; donc on a $OC = \varepsilon + \frac{k^2}{\varepsilon}$. Cette expression comparée à (o'' et l''), fait voir que le *centre spontané de rotation seroit le même que le centre de percussion et d'oscillation, si on supposoit que le corps tournât autour d'un axe passant en* O. Ce point C est d'ailleurs indépendant des forces, car la valeur OC ne renferme ni M ni P; de plus, si on place en C un axe de rotation, il n'éprouvera aucune secousse, ce qui est d'accord avec ce qu'on a déjà vu (245).

*257. Pour expliquer le double mouvement de rotation et de translation des planètes, il suffit de supposer que chacune a reçu primitivement une impulsion dont la direction ne passe pas par son centre de gravité. La terre fait chaque jour un tour sur son axe, et la vîtesse de rotation d'un des points de l'équateur est $V = 401^m,699$; indépendamment de son mouvement de translation qui lui fait parcourir son orbite dans une année avec la vîtesse $v = 25\,590^m,9$; l'unité de tems étant le cent millième du jour. Soit r le rayon de la terre, on a (251, 1°.) $k^2 = \frac{2}{5} r^2$; et $V = r\varepsilon$ (211) : cette planète auroit donc reçu une impulsion dont la direction auroit passé à une distance ε de son centre que (q'') donne $= \frac{2}{5} \cdot \frac{rV}{v}$, en la supposant homogène. Le calcul donne à-peu-près $\varepsilon = \frac{r}{160}$.

258. Lorsque nous avons traité du choc des corps durs, pag. 304, nous les avons réduits par la pensée à n'être que simples points matériels : nous allons maintenant analyser la même théorie en conservant aux corps leurs formes particulières, et les supposant symétriques par rapport à un plan.

Soient M' et M'' les masses de deux corps durs; supposons que M'' soit en repos, et choqué par M' animé de la vîtesse V', dans la direction LN normale à la surface choquée, et qui ne passe pas par le centre de gravité G. Menons GN perpendiculaire sur LN, et faisons $GN = a$. Désignons par v' et v'' les vîtesses des centres de gravité des masses M', M'' après le choc : on aura $V' - v'$ pour la vîtesse perdue par celui de M' dans le choc, de sorte que $M'(V' - v')$ sera la quantité de mouvement employée à mouvoir M', valeur égale par conséquent à $M''v''$ (218), ce qui donne, avec l'équation (q''), Fig. 122.

$$v'' = \frac{M'}{M''}(V' - v'), \text{ et } \varepsilon = \frac{av''}{k^2}.$$

Quoique ces deux équations soient les seules que donne le double mouvement du corps M'', elles ne suffisent pas pour résoudre le problème, et il faut s'en procurer une troisième, puisqu'elles comprennent trois inconnues. Cela est même visible par la nature du système qui nous offre une condition dont nous n'avons point fait encore usage. En effet, le corps M'' n'a acquis toute la vitesse que le choc doit lui imprimer, que lorsqu'il n'est plus pressé par le corps choquant (217), ce qui arrive lorsque les points L de contact de ces corps ont la même vitesse dans le sens de LN; Il suit de là que cette vitesse du point L, considéré comme faisant partie des deux corps, doit être la même et $= v'$. En tant qu'il appartient à M'', il aura pour vitesse (211), $s \times LG$ et v''; la première partie $s \times LG$ est due à la rotation et dirigée suivant Ln: on pourra la concevoir décomposée en deux autres dirigées, l'une suivant LN, et l'autre suivant la tangente TS: et comme $\cos NLn = \frac{GN}{LG}$, la première est $as = \frac{a^2 v''}{k^2}$; on a donc $v' = v'' + \frac{a^2 v''}{k^2}$.

Ces trois équations serviront à déterminer v', v'' et s en éliminant: elles résolvent donc le problème proposé.

Si la vitesse du corps M' avant le choc étoit oblique à la tangente TS, on la décomposeroit en deux autres, l'une V' perpendiculaire à cette tangente; l'autre V'' dans le sens de cette droite. La première est celle que nous venons de considérer ci-dessus; la deuxième a son effet entier, puisqu'elle est à angle droit avec l'autre: on devra donc la composer avec la vitesse v' qui restera de la vitesse V' après le choc. La vitesse que le corps choquant M' aura après le choc sera donc $= \sqrt{(v'^2 + V''^2)}$

et sa direction fera avec la touchante TS un angle qui a pour tangente $\frac{V'}{V''}$.

IX. *Mouvement d'un système de corps dont toutes les parties sont sollicitées par des forces accélératrices quelconques.*

259. Examinons les circonstances du mouvement d'un système soumis à l'action de forces accélératrices quelconques qui agissent sur toutes ses parties m', m'',... Réduisons pour chaque molécule les forces qui la sollicitent à trois parallèles à trois axes immobiles; savoir, X', Y', Z' pour m'; X'', Y'', Z'' pour m''; et ainsi des autres. Soient x, y et z les coordonnées variables du centre de gravité de ce système par rapport à ces trois axes. Concevons de plus qu'on a fait passer par ce centre trois autres axes parallèles aux premiers, et tels que lorsque le système est en mouvement il les emporte avec lui, sans qu'ils cessent d'être parallèles aux premiers, ni de passer par le centre de gravité : bien entendu que leurs points de rencontre avec le corps seront variables. Nommons x', y' et z' les coordonnées de la molécule m' rapportée à ces trois axes; de même x'', y'' et z'' pour m'';... les variables x, y et z détermineront la position du centre de gravité du corps au bout du tems t; et x', y' z'; x'', y'', z'';... donneront les positions respectives des molécules dans leur mouvement particulier : c'est ce qui sera bientôt éclairci. Les coordonnées de m' par rapport aux trois premiers axes immobiles sont $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$: de même $x+x''$, $y+y''$, $z+z''$ pour m''; etc.....

Nous ne ferons ici nos raisonnemens que dans le sens de l'un des axes, parce que les deux autres offrent les mêmes considérations. La vîtesse de la molécule m' dans le sens des x est $\frac{d(x+x')}{dt}$, vîtesse qui, par l'effet des puissances et d'après la liaison mutuelle des parties du système, doit s'accroître de $d\left(\frac{dx+dx'}{dt}\right)=\frac{d^2x+d^2x'}{dt^2}$, en prenant dt constant. La vîtesse imprimée à m', suivant les x, pendant l'instant dt, est $X'dt$. Dans le tableau suivant, nous n'avons eu égard qu'aux accroissemens de forces motrices, car ces forces elles-mêmes disparoîtroient du calcul. Ainsi on a

forces imprim. suivant			vîtesses effectives suivant		
les x.	les y.	les z.	les x.	les y.	les z.
$m'X'$ ...	$m'Y'$ ...	$m'Z'$	$\frac{d^2x+d^2x'}{dt^2}$ ...	$\frac{d^2y+d^2y'}{dt^2}$ ...	$\frac{d^2z+d^2z'}{dt^2}$
$m''X''$ ...	$m''Y''$ ...	$m''Z''$	$\frac{d^2x+d^2x''}{dt^2}$ ...	$\frac{d^2y+d^2y''}{dt^2}$ ...	$\frac{d^2z+d^2z''}{dt^2}$
etc.					

Il s'agit maintenant d'exprimer qu'il y a équilibre entre les forces imprimées et celles qui ont lieu prises en sens opposé : ce qui nécessite l'usage des six équations (X et Y, 43).

1°. les trois équations (X) indiquent que la somme des composantes dans le sens de chaque axe est nulle ; on a donc pour l'axe des x

$$o=(X'm'+X''m''+\ldots)dt^2-d^2x(m'+m''+\ldots)$$
$$-(m'.d^2x'+m''.d^2x''+\ldots).$$

Mais par la propriété du centre de gravité (C', 55),

$x'm' + x''m'' + \text{etc.} = 0, m'y' + m''y'' + \text{etc.} = 0 \ldots (1).$

En différentiant par rapport à x et y, on a donc

$m'd^2x' + m''d^2x'' + \text{etc.} = 0, m'd^2y' + m''d^2y'' + \text{etc.} = 0. (2).$

Désignons comme précédemment $m' + m'' + \text{etc.}$, ou la masse entière du corps, par M, et $X'm' + X''m'' + \text{etc.}$ par $S.m'x'$; nous aurons donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} - S.X'm' = 0.$$

De même, pour les axes des y et des z; on trouve donc pour les trois premières équations de mouvement

$$\left.\begin{aligned} M.\frac{d^2x}{dt^2} &= S.X'm' \\ M.\frac{d^2y}{dt^2} &= S.Y'm' \\ M.\frac{d^2z}{dt^2} &= S.Z'm' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (r'').$$

Nous nous servons ici de deux signes dont il est important de bien distinguer le sens. La caractéristique d est employée à désigner les variations successives des coordonnées lorsque le corps change de position : le signe S est destiné à représenter des sommes de termes de même forme et dont les accens sont seuls différens : lorsque le nombre de ces termes est infini, S désigne une véritable intégrale, prise dans toute l'étendue du systême, mais qui est indépendante de ses changemens de position. L'intégrale relative à cette dernière circonstance sera désignée par la lettre $\int$; de sorte que $\int$ et d se rapportent au tems, et S aux dimensions du systême.

2°. Il faut exprimer que les momens des composantes satisfont aux équations (Y, 43). Prenons donc la différence des momens par rapport aux plans des xz et des yz respectivement, des composantes parallèles aux x et aux y, et égalons cette différence à zéro. Or, observons que, pour le point m', les composantes X', Y' sont distantes de l'axe des z; savoir, la première de $y+y'$, et la seconde de $x+x'$; on aura donc, pour la différence des momens,

$$\left(X'm' - \frac{d^2x}{dt^2}m' - \frac{d^2x'}{dt^2}m'\right)(y+y')$$

$$-\left(Y'm' - \frac{d^2y}{dt^2}m' - \frac{d^2y'}{dt^2}m'\right)(x+x').$$

En exécutant les multiplications et observant que comme chaque molécule doit donner une expression semblable, toutes les lettres marquées d'un trait doivent se reproduire dans des termes semblables avec 2, 3, ... accens, de plus en représentant la somme des termes de même forme par le signe S, et ayant égard aux équations (1) et (2) données par la propriété du centre de gravité, on obtient

$$\left.\begin{array}{l} yS.m'X' - My.\dfrac{d^2x}{dt^2} + S.y'X'm' - S.m'y'\dfrac{d^2x'}{dt^2} \\ -xS.m'Y' + Mx.\dfrac{d^2y}{dt^2} - S.x'Y'm' + S.m'x'\dfrac{d^2y'}{dt^2} \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation peut être mise sous une forme plus simple; en effet, en vertu du produit de la seconde des équations (r'') par x, et de celui de la première par y, les deux premiers termes et leurs correspondans disparoissent et on a simplement

$$S.X'm'y' - S.Y'm'x' - S.\frac{d^2x'}{dt^2}m'y' + S.\frac{d^2y'}{dt^2}m'x' = 0$$

ou $S.m'\dfrac{x'd^2y'-y'd^2x'}{dt^2}=S.m'(Y'x'-X'y')$.

L'intégrale du premier membre, prise par rapport au tems, est $S.m'\dfrac{x'dy'-y'dx'}{dt}$. En opérant de même pour les deux autres axes, et faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} S\left\{m'.\int(Y'x'-X'y')\,dt\right\}=N \\ S\left\{m'.\int(Z'x'-X'z')\,dt\right\}=N' \\ S\left\{m'.\int(Z'y'-Y'z')\,dt\right\}=N''\end{array}\right\}\ldots\ldots.(s''),$$

on aura pour les trois autres équations du mouvement

$$\left.\begin{array}{l} S.m'\dfrac{x'dy'-y'dx'}{dt}=N \\ S.m'\dfrac{x'dz'-z'dx'}{dt}=N' \\ S.m'\dfrac{y'dz'-z'dy'}{dt}=N''\end{array}\right\}\ldots\ldots.(t'').$$

260. Il résulte de là plusieurs conséquences importantes.

1°. Les trois équations (r'') ne renferment pas x', x'', ...; elles se rapportent donc uniquement au centre de gravité. Elles servent à en déterminer le mouvement, quel que soit celui des molécules du systême : de sorte que ce mouvement ne dépend que des forces accélératrices qui les sollicitent et nullement de l'action mutuelle qu'elles exercent les unes sur les autres; c'est en quoi consiste le principe de *la conservation du mouvement du centre de gravité*.

Au reste, si on conçoit toute la masse réunie en un point unique sur lequel agiroient les forces X', Y', Z', etc., il est visible que toutes ces forces seroient réduites à trois qui solliciteroient un point dont la masse seroit M : mais alors les équations (r''), qui sont destinées à déterminer le mouvement du centre de gravité du corps, deviendroient celles qu'on a trouvées n°. 166 (c'), d'où résulte ce théorême général, que *le mouvement du centre de gravité d'un systême libre quelconque, est toujours le même que si tous les corps qui le composent étoient réunis en un seul point sollicité par les mêmes forces accélératrices dont les parties du systême étoient animées dans leur état naturel.* Ceci s'accorde avec ce qu'on a dit (255).

2°. Les équations (t'') ne renferment pas les coordonnées x, y, z, du centre de gravité, et sont par conséquent destinées à faire connoître les diverses positions des parties du systême, par rapport aux trois axes mobiles qui passent par ce centre : ces équations ne seront en rien altérées si on applique au centre de gravité des forces qui le retiennent en repos, puisque les valeurs de N, N' et N'' ne peuvent renfermer les puissances qui passent par ce centre (29, 41) : donc le mouvement de rotation que les équations (t'') déterminent, est le même que si ce centre étoit fixe.

Ainsi *lorsqu'un systême sera soumis à l'action de diverses forces accélératrices, il aura un double mouvement ; le premier sera une translation du centre de gravité, comme si, à chaque instant, toutes ces forces agissoient parallèlement à leurs directions sur ce point, auquel on imagineroit la masse concentrée : le second sera un mouvement de rotation autour du centre de gravité comme si ce point étoit fixe.*

3°. Si le corps n'est mu que par une impulsion primitive, on a $X'=0$, $Y'=0$, etc. Les équations (r''), qui déterminent le mouvement du centre de gravité, se réduisent donc à $M\frac{dx}{dt}=A$, $M\frac{dy}{dt}=A'$, $M\frac{dz}{dt}=A''$; comme ce qu'on a fait n°. 169 s'applique ici, on en conclut aisément que le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme, et que sa vîtesse est la même que si la force impulsive agissoit immédiatement sur lui; ce qui est conforme à ce que nous avons déja démontré (253).

4°. Faisons sur les valeurs (s'') les mêmes raisonnemens qu'au n°. 170 : la quantité $S.m'(Y'x'-X'y')$ est nulle dans trois cas : 1°. lorsque le systême n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, et n'est mu que par une impulsion; 2°. lorsque toutes les forces passent par l'origine; 3°. lorsque les forces sont les attractions mutuelles des parties; car soit δ la distance de m' à m'' et f leurs attractions réciproques égales et opposées, on aura $m'X'=-m''X''=\frac{f}{\delta}(x'-x'')$, car $\frac{x'-x''}{\delta}$ est le cosinus de l'angle formé par f avec les x; de même $m'Y'=-m''Y''=\frac{f}{\delta}(y'-y'')$. Or les termes de N que produisent ces quatre forces sont $m'Y'(x'-x'')-m'X'(y'-y'')$, quantité visiblement nulle; donc les termes qui proviennent des attractions se détruisent deux à deux. Dans ces trois cas, N, N' et N'' sont donc des constantes.

Cela posé, si on projette la masse m' sur le plan des x et des y, la différentielle $x'dy'-y'dx'$ sera (170) la moitié de l'aire que trace dans l'instant dt le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées à la projection de m'. La somme de ces aires élémentaires multipliées respectivement par les masses est donc $=Ndt$, et proportionnelle à l'élément du tems : d'où il suit que dans un tems fini elle est $=Nt$, et proportionnelle au tems:

il en est de même des deux autres plans coordonnés. C'est en cela que consiste le *principe de la conservation des aires proportionnelles aux tems.*

On pourroit, par une transformation de coordonnées, déterminer des axes tels que les deux constantes N' et N'' soient nulles, et que le plan xy, conserve seul la constante N; ce plan a été nommé *Plan invariable* ou du *maximum des aires*, à cause des propriétés dont il jouit. C'est Laplace qui, le premier, les a reconnues, et nous renvoyons à cet égard à la *Mécanique céleste*, pag. 58, afin de ne point nous écarter de notre objet. Il y est prouvé, 1°. qu'il n'existe qu'un seul plan qui satisfasse à la condition exigée, du moins lorsque l'origine ne change pas; 2°. que la somme des aires tracées par les projections des rayons vecteurs des corps et multipliées par leurs masses y est la plus grande possible; 3°. que cette somme pour tout plan perpendiculaire est nulle; 4°. que si le centre de gravité est pris pour origine, de sorte que le plan se meuve avec le corps, il demeurera toujours parallèle à lui-même.

5°. Multiplions les équations (r'') par dx, dy et dz respectivement, ajoutons et intégrons, ainsi que nous avons déjà fait n°. 168, il viendra, à cause de.......
$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{ds^2}{dt^2},$$

$$M\frac{ds^2}{dt^2}=A+2S\left\{m\int(X'dx'+Y'dy'+Z'dz'\right\}.$$

Or $Sm(X'dx'+Y'dy'+Z'dz')$ sera une intégrale exacte, lorsqu'on n'aura à considérer que des forces attractives; car il suit de ce qu'on a dit (4°.) que...............
$X'dx'=\frac{f}{\delta}(x'-x'')\,dx'$, etc.;... si donc on réunit les

termes qui proviennent des attractions de m' et m'' on trouve

$$\frac{f}{\delta}\{(x'-x'')(dx'-dx'')+(y'-y'')(dy'-dy'')+(z'-z'')(dz'-dz'')\};$$

quantité visiblement $=\frac{f}{\delta}(\frac{1}{2}d.\delta^2)=fd\delta$: or f est fonction de δ, donc $fd\delta$ est intégrable : et ainsi des autres. En désignant l'intégrale du second membre par ψ, on aura

$$SMv^2=A+2\psi\ldots\ldots\ (u'').$$

On détermine la constante A d'après des valeurs simultanées de v et ψ; soient v' et ψ' ces valeurs, on a $M(v^2-v'^2)=2(\psi-\psi')$: ainsi *la différence des forces vives à deux instans quelconques, ne dépend pas des courbes décrites par chaque point, mais seulement de leurs positions respectives à ces deux instans* : C'est en cela que consiste (204) le principe connu sous le nom de *Conservation des forces vives*. La somme des forces vives (236), ou la force vive totale du systême est constante si le systême n'est sollicité par aucune force.

6°. Si le systême consiste en un corps solide, nos équations r'', s'' et t'' ont lieu; mais il faut y regarder m' comme la différentielle dM de la masse M, et S comme le signe d'une intégration à prendre dans toute l'étendue du corps. Les seconds membres des équations (r'') sont donc $S.XdM$, $S.YdM$ et $S.ZdM$; elles sont simplement relatives au mouvement du centre de gravité, et ne présentent pas d'autres difficultés que lorsqu'il s'agit du mouvement d'un point. Il n'en est pas de même des équations (t'') qui servent à déterminer le mouvement de rotation du corps autour du centre de gravité comme s'il étoit fixe : mais nous renvoyons à cet égard à la *Mécanique céleste*, pag. 72 : nous ferons seulement remarquer que si le corps eût eu un de ses points fixes, les équations (Y)

eussent suffi, et on n'auroit obtenu que celles (t''), pourvu qu'au lieu de placer l'origine des x', y', z'... au centre de gravité, on l'eût supposée au point fixe.

X. *Des Cordes vibrantes.*

261. Le problème des cordes vibrantes a fait le sujet des recherches des plus profonds analystes; Euler, La Grange, d'Alembert et D. Bernoulli : voici en quoi consiste ce problème.

Fig. 123. *Une corde* AB *étant tendue et fixée en ses deux extrémités, si on la contraint de prendre une forme quelconque* ASB, *et si on la lâche ensuite, trouver à chaque instant la figure et le mouvement de cette corde.*

Soit PS l'ordonnée initiale, c'est-à-dire l'ordonnée d'un point pris sur la courbe ASB dans sa position primitive et répondant à l'abscisse $AP = x$. Au bout du tems t, par l'effet de la tension de la corde, le point S sera en M, et la courbe prendra la figure AMB. Soit $PM = y$; il est clair que PS n'est fonction que de x, tandis que y l'est de x et de t : cherchons celle-ci d'après la connoissance de l'autre, et en supposant que,

1°. La corde est de grosseur uniforme, a est sa longueur, P son poids, F le poids employé à la tendre.

2°. On n'imprime à la corde aucune vitesse initiale.

3°. Il ne s'agit que de mouvemens très-petits, en sorte qu'à chaque instant on pourra regarder les ordonnées y comme très-petites; et de plus un arc quelconque AS pourra être considéré comme sensiblement égal à son abscisse AP; ainsi $AM = AS = \ldots = AP$: d'où il suit que chaque point S se meut dans son ordonnée PS, et que la tangente TM à la courbe, à un instant et à un point quelconques, faisant avec l'axe un angle ω très-petit, on a $\sin \omega = \omega$ et $\cos \omega = 1$.

Prenons deux élémens voisins Mm et Mm', prolongés suivant les tangentes tM et TMD : la tension F de la corde au point M est exercée suivant ces deux lignes (85) : celle qui a lieu suivant Mm de M vers D, se décompose en deux autres, agissant l'une suivant Mo et $= F \cos \omega = F$, l'autre suivant Mi et $= F \sin \omega = F\omega$; la première sera par hypothèse détruite par la composante dirigée de M vers n, de la tension tM. Enfin comme l'angle $MtP = \omega + d\omega$, la tension Mt a pour composante dans le sens de MP, $F(\omega + d\omega)$. Ainsi la tension au point M se réduit à une force unique $= Fd\omega$ agissant de M vers P.

La corde étant de grosseur uniforme, les longueurs des arcs sont proportionnelles à leurs poids, et le poids gdm de l'élément dm placé en M se trouve par la proportion $\frac{a}{P} = \frac{dx}{gdm}$; donc $dm = \frac{Pdx}{ag}$. Or, comme $Fd\omega$ est une force motrice parce que F est un poids, on aura la force accélératrice (221) en divisant $Fd\omega$ par la masse dm de l'élément sur lequel elle agit ; cette dernière force est donc $= \frac{agF}{P} \times \frac{d\omega}{dx}$.

On observera que ω est un angle qui a lieu au bout du tems t déterminé ; et que $d\omega$ n'est que l'accroissement de ω pris par rapport à la seule variable x : mais l'arc ω, son sinus et sa tangente se confondent, donc $\omega = \frac{dy}{dx}$; et comme ici y ne doit pas être différentié par rapport à t ; que de plus ω croît quand x et y diminuent ; on a $\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = -\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, en ne différentiant toujours y que par rapport à x. Ainsi la force accélératrice qui agit sur l'élément en M est $-\frac{agF}{P}\times\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. Or l'expression générale de la force accélératrice (152) est $\frac{d^2y}{dt^2}$, ou plutôt $-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, par la même raison que ci-dessus; donc en faisant, pour simplifier, la constante $\frac{agF}{P}=b^2$, on obtient

$$b^2\times\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

262. Telle est l'équation aux différences partielles du mouvement d'un point quelconque de la corde : pour l'intégrer, remarquons que le coefficient différentiel du second ordre relatif à x, multiplié par b^2, devant être égal à celui relatif à t, il est visible que $x+bt$ satisfait à cette condition, aussi bien que toute fonction φ de $x+bt$. Et comme on peut en dire autant de toute autre fonction F de $x-bt$,

$$y=\tfrac{1}{2}\left\{\phi(x+bt)+F(x-bt)\right\}$$

est l'intégrale de l'équation (1) puisqu'elle contient deux fonctions arbitraires.

Appliquons ce résultat à la corde vibrante. La vîtesse $\frac{dy}{dt}$ à un instant quelconque est.......................... $\frac{b}{2}\left\{\phi'(x+bt)-F'(x-bt)\right\}$; supposons que la corde soit originairement en repos dans la situation ASB, il faut que $t=0$ réponde à $\frac{dy}{dt}=0$: ainsi $\varphi'x-F'x=0$, quel que soit x; donc $\phi x=Fx$; puis mettant $x-bt$

pour x, $\varphi(x-bt)=F(x-bt)$, ce qui prouve que les deux fonctions φ et F sont les mêmes l'une que l'autre. Notre analyse ne renferme plus qu'une fonction arbitraire ϕ, la condition de la vîtesse initiale nulle en ayant éliminé une. L'équation finie et intégrale de la courbe et la vîtesse à un instant quelconque sont donc

$$y=\tfrac{1}{2}\left\{\phi(x+bt)+\phi(x-bt)\right\}\ldots\ldots(2).$$

$$\frac{dy}{dt}=\tfrac{1}{2}b\left\{\phi'(x+bt)-\phi'(x-bt)\right\}\ldots\ldots(3).$$

263. Si on fait $t=0$, on a $y=\varphi x$; la fonction φ est donc déterminée par la condition que $y=\varphi x$ soit l'équation de la courbe initiale ASB; et comme cette courbe est connue, la fonction φ doit être regardée comme donnée; il suffira d'y changer x en $x+bt$ et $x-bt$, et de prendre la moitié des résultats, et on aura la valeur de y à un instant quelconque; on pourra donc construire la courbe qui a lieu pour un tems t déterminé. Fig. 123.
Remarquons toutefois qu'il suit de la théorie des équations aux différences partielles, que la courbe initiale ASB peut être *discontinue*, c'est-à-dire formée de plusieurs portions de lignes différentes et quelconques; de sorte qu'alors la fonction φ peut ne point être assujettie à la loi de continuité : alors dans l'équation (2) de la courbe au bout du tems t, il faudroit changer la forme de la fonction ϕ, lorsqu'on voudroit déterminer le lieu d'un point dont l'abscisse x appartient à une autre courbe initiale. Or cela n'empêche point de construire la courbe et de trouver toutes les particularités de son mouvement; il ne faut que laisser φ arbitraire.

D'abord pour construire la courbe, on tracera sa figure initiale ASB, dont $\varphi(x+bt)$ et $\varphi(x-bt)$

A et B demeurent fixes; cherchons s'il existe une courbe qui satisfasse à cette condition. Les points fixes sont donnés par l'équation $\varphi(x+bt)+\varphi(x-bt)=0$, quel que soit t: or il résulte de (5) qu'elle ne sera nullement changée, si on remplace x par $ma+x$; de plus, on sait que $x=0$ et $x=a$ doivent satisfaire à notre équation; donc ma et $ma+a$ y satisferont aussi; et comme on a d'une part tous les multiples pairs, et de l'autre tous les impairs de a, on voit que si on prend $AB=BC=CD=a$ les points A, B, C, D...... resteront fixes durant tout le mouvement, pourvu qu'on donne à la courbe $AMM'M''D$ une figure convenable. Ainsi le prolongement de la corde est non-seulement permis, mais même l'analyse fait voir qu'il est inhérent à la théorie. Fig 124.

Quant à la figure de la corde prolongée, elle offre des particularités remarquables : pour trouver les ordonnées $P'M'$ et $P''M''$ qui répondent aux points P', P'', à une distance d'un nœud $C=AP=x$, il faut mettre dans (3), $2a-x$ et $2a+x$ pour x; et en général $ma\mp x$. Les deux fonctions φ deviennent $\varphi(ma\mp x+bt)$ et $\varphi(ma\mp x-bt)$: occupons-nous d'abord des signes supérieurs, c'est-à-dire de P'; en changeant dans (6) u en $x+bt$, et ensuite en $x-bt$, on voit que les deux fonctions φ de l'équation (2) restent les mêmes, mais avec un signe contraire; ainsi soit AMB la courbe au bout du tems t, les coordonnées PM et $P'M'$ sont égales et opposées. En prenant les signes inférieurs, et changeant de même u en $x+bt$ et $x-bt$ dans (5), on voit que $PM=P''M''$. Il résulte de là que la courbe $AMBM'M''$.... forme à tous les instans, et par conséquent originairement, des ventres alternativement placés de part et d'autre de l'axe XZ; que leur nombre est infini, et enfin que ceux de rang pair sont égaux entre eux, et que ceux de rang impair sont aussi égaux aux premiers, mais après un double renversement, d'abord de haut en bas, et ensuite de droite à gauche.

264. Pour connoître la figure de la courbe au bout du tems $t=\frac{a}{b}$, il faut faire $bt=a$ dans (2), ce qui donne $y=\phi(x+a)$, en vertu des équations (4) : donc l'ordonnée Pm est égale à celle $p'm'$ qui répond à l'abscisse $x+a$, lorsque $t=0$; ordonnée d'ailleurs négative. Ainsi les courbes AmB, $BM'C$ sont identiques. Mais maintenant on peut regarder AmB comme une courbe initiale, de sorte que la corde devra reprendre sa première figure au bout d'un tems égal au premier..... Toutes ces circonstances, qu'on auroit pu déduire de la construction que nous avons donnée, sont rendues évidentes par la supposition générale de $t=\frac{ka}{b}$, k étant un entier quelconque : car l'équation (3) devient

$$y=\tfrac{1}{2}\{\phi(x+ka)+\phi(x-ka)\}$$

Or en changeant dans (5), u en $x+ka$ et $x-ka$, on voit que les deux fonctions ne changent pas en prenant les formes $\phi(ma+x+ka)$ et $\phi(ma+x-ka)$; et comme m est un nombre pair quelconque, on peut le prendre différent dans les deux cas, de sorte que les résultats soient équivalens à $\phi(x+la)$ et $\phi(x-la)$, l étant le même et pair ou impair avec k. Les valeurs de y redeviennent donc les mêmes dans toute l'étendue de la courbe, pour tous les instans qui répondent à des valeurs de $t=\frac{ka}{b}$ et $t=\frac{la}{b}$; d'où il suit que la courbe reprend sa figure initiale pour toutes les valeurs de k paires, et la figure opposée égale et renversée pour k impair. Ces tems sont séparés entre eux par l'intervalle $\frac{a}{b}$; c'est le tems de l'oscillation.

Quoiqu'il soit certain que la corde revient toujours au même état, après le tems $t = \frac{2a}{b}$, il ne s'ensuit pas que la corde n'achève dans ce tems que 2 vibrations, et il seroit même possible qu'elle en fît 4, 6, ou un nombre pair quelconque; cela dépend d'une certaine disposition de l'état initial de la corde; lorsqu'elle n'a qu'un seul ventre, comme dans la fig. 123, le tems d'une vibration est sans doute $t = \frac{a}{b}$. Mais si la figure initiale avoit deux ventres égaux, comme si la corde ayant AC pour longueur, on lui avoit donné une forme composée de deux ventres égaux AMB et $BM'C$, séparés au milieu B par un point commun avec l'axe AB, alors ce point B demeureroit en repos, et le mouvement de la corde AC seroit le même que celui d'une corde de longueur moitié moindre et d'une tension égale. Or il faut, pour produire ces vibrations deux fois plus rapides, que le nœud de la figure initiale soit précisément au milieu de la longueur, et que les deux ventres soient égaux et semblables entre eux. Fig. 124.

Sans cette disposition ou toute autre analogue, la corde n'achèvera une vibration qu'au bout du tems $t = \frac{a}{b} = \sqrt{\left\{\frac{Pa}{Fg}\right\}}$. Ainsi $\sqrt{\left(\frac{Pa}{Fg}\right)}$ exprime le nombre de secondes nécessaire pour achever une vibration. Comme la tension F est représentée par un poids, on peut lui substituer le poids F d'une longueur q de la corde vibrante : or on a visiblement $\frac{a}{q} = \frac{P}{F}$, d'où $F = \frac{Pq}{a}$; donc $\sqrt{\left(\frac{Pa}{Fg}\right)} = \frac{a}{\sqrt{(qg)}}$. Il résulte de là que le nombre de vibrations que la corde fait dans chaque seconde est

$$\frac{1}{t} = \sqrt{\left(\frac{Fg}{Pa}\right)} = \frac{\sqrt{(qg)}}{a}.$$

C'est ce nombre qu'on regarde comme la mesure du son produit par une corde mise en vibration ; et on voit que, *à tension égale, le son est réciproquement proportionnel à la longueur de la corde.*

265. Si on fait $bt = \frac{1}{2}a$ dans l'équation (2), on a

$$y = \frac{1}{2}\left\{\phi\left(x + \frac{1}{2}a\right) + \phi\left(x - \frac{1}{2}a\right)\right\}.$$

Or $\phi u = -\phi(-u)$ montre que cette valeur s'évanouit, quel que soit x, si $\phi(\frac{1}{2}a + x) = \phi(\frac{1}{2}a - x)$, c'est-à-dire si la figure ASB, donnée au commencement du mouvement, a des ordonnées égales correspondantes aux abscisses $\frac{1}{2}a + x$ et $\frac{1}{2}a - x$; ce qui arrive lorsque l'ordonnée élevée au milieu de AB est un diamètre de cette courbe, c'est-à-dire la partage en deux parties semblables. Ainsi, dans ce cas, la courbe se tend en ligne droite au milieu de chaque vibration.

Fin de la Dynamique.

LIVRE III.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre des fluides en général.

I. *Proposition fondamentale.*

266. Quoique la figure des molécules d'une masse fluide quelconque nous soit inconnue, nous ne pourons douter qu'elles ne soient matérielles, et que par conséquent les lois générales de l'équilibre ne leur conviennent comme aux corps solides. La propriété distinctive des fluides consiste dans la petitesse et la mobilité excessive de leurs molécules (1). Si cette propriété étoit traduite en calcul, les lois de l'équilibre des fluides n'exigeroient pas une théorie particulière; elles formeroient un cas particulier des propositions générales de la Statique : mais comme elle n'est point susceptible de se prêter aux symboles analytiques, d'Alembert a pris pour base de l'Hydrostatique le principe de l'*égalité de pression*. Voici en quoi consiste ce principe : *Lorsqu'un fluide est renfermé dans un vase* AMB, *si on lui applique une pression, elle se distribuera également et en tout sens dans toute la masse, de sorte que les parois du vase seront également pressées.* Fig. 113.

Bien entendu que nous ne supposons ici aucune force agissant sur les diverses molécules de cette substance, et que par conséquent nous la regardons comme non pesante.

267. Imaginons donc qu'une force P agit sur ce fluide, supposé en équilibre et dans l'impossibilité de s'échapper par aucun orifice : on conçoit pour cela un *Piston* (*) PD adapté à l'une des parties du vase. Soit en E une surface plane $= A$, et égale à la section transversale du piston ; elle sera pressée avec la même énergie que si le piston PD lui étoit immédiatement appliqué. De là il suit qu'on peut, ou employer en E un nouveau piston pressé par une force $Q = P$ pour produire l'équilibre, ou laisser simplement le vase fermé en D, parce que la résistance de la paroi équivaut à ce piston. D'ailleurs l'aire M pourroit être située dans l'intérieur du fluide ; car on peut de D conduire en M un canal, et supposer qu'à l'exception du fluide qui y est contenu, tout le reste soit devenu solide : il est clair que l'état d'équilibre devra encore subsister : car, en général, l'équilibre d'un système de corps n'est point troublé, en supposant que plusieurs d'entre eux viennent à s'unir ou à s'attacher à des points fixes.

On doit conclure de là que si on dispose tant de pistons qu'on voudra, de bases égales et sollicités par des forces égales, il y aura équilibre. Or l'une de ces forces peut être regardée comme faisant équilibre à toutes les autres : de plus, la distance entre les bases est ici arbitraire, et on peut la supposer nulle : donc la force P agissant sur un piston dont la base est A, fait équilibre à la puissance nP

(*) Un piston est un corps qui remplit exactement la capacité d'un cylindre creux qu'il peut parcourir librement dans le sens de son axe.

agissant sur un piston dont la base est nA. Soit $nP = p$, et $nA = a$, nous aurons donc $\frac{P}{p} = \frac{A}{a}$, ou

$$pA = aP \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Cette équation donne $p = \frac{a}{A} \times P$; on peut donc, par l'intermède d'un fluide incompressible, produire avec une puissance arbitraire P une pression p aussi grande qu'on voudra. Il ne s'agira pour cela que de prendre les aires a et A des bases des pistons dans un rapport convenable; c'est sur ce principe qu'est fondée la presse de *Pascal*. Consultez le *Traité de l'équilibre des liqueurs*.

268. Pour que le mot de pression, appliqué aux fluides, n'offre rien de vague à l'esprit, avant d'aller plus loin, nous rappellerons ici ce qui a été dit (48 et 221) sur les pressions en général. Nous avons vu que lorsque des forces étoient détruites par la résistance que leur opposoit un corps solide, il falloit que la résultante de ces forces fût normale à la surface de ce corps : la *pression* est cette résultante; de sorte qu'elle est égale et directement opposée à la puissance qui mettroit le système en équilibre, si l'obstacle n'existoit pas. De plus, cette force est mesurée par le produit de la masse sur laquelle elle agit, multipliée par l'élément de vîtesse qu'elle est capable de lui imprimer durant le premier instant. Comme on n'a jamais que des pressions à comparer entre elles, on prend simplement pour leur mesure *le produit de la force par la masse qu'elle sollicite*.

On rapporte ordinairement les pressions à l'unité de surface, c'est-à-dire qu'on suppose que l'aire pressée $= 1$; si donc $A = 1$, l'équation (α) se réduit à $p = aP$, ce qui apprend que *pour trouver la pression qu'éprouve l'aire* a, *il faut multiplier* a *par la pression qu'éprouve l'unité de surface.*

II. *Equations d'équilibre d'une masse fluide; pressions qu'éprouvent ses diverses molécules.*

269. Supposons maintenant que les diverses molécules d'un fluide soient soumises à l'action de puissances, telles que la gravité, etc.; le principe d'égalité de pression, exige une modification, car il ne peut plus indiquer qu'une surface a éprouve la même pression en quelque lieu qu'elle soit située, ce qui seroit contraire aux faits. On doit entendre par cette égalité de pression, que la puissance qui agit sur le piston se distribue encore comme si le fluide n'étoit soumis à l'action d'aucune force accélératrice; mais cela est indépendant de l'effet dû à celle-ci qui doit s'ajouter à l'autre. Ainsi la pression varie alors d'un point à l'autre de la masse fluide, elle est due aux forces accélératrices et à la pression qu'elle éprouve à ses limites, considérée indépendamment de ces forces. Nous rapporterons dorénavant la pression à l'unité de surface, c'est-à-dire que nous supposerons que l'aire pressée est $= 1$, et que la pression est la même en tous ses points. Considérée sous ce rapport la pression devient finie et n'est plus qu'hypothétique : mais il en est ici comme de la vîtesse et de la force accélératrice (149, 152) qui sont modifiées par des hypothèses, sans que pour cela le calcul en soit altéré.

270. Désignons par p la pression rapportée à l'unité de surface, qu'éprouve une molécule dont les coordonnées sont x, y et z; par X, Y, et Z les composantes parallèles aux axes de la force qui agit sur cette molécule;

enfin par D la densité du fluide. Comme p, X, Y, Z et D peuvent varier d'un point à l'autre de la masse fluide, ce sont des fonctions de x, y et z.

Cela posé, la masse fluide étant en équilibre, cet état ne sera nullement altéré, si on conçoit une portion de cette masse comprise dans une enveloppe flexible; et la figure de cette enveloppe, quelle qu'elle soit, ne devra pas changer, puisque chaque point devra être également pressé tant à l'intérieur qu'à l'extérieur. Pour traduire facilement ce fait en analyse, nous attribuerons à l'enveloppe la forme d'un parallélipipède, dont les arêtes soient parallèles aux axes : et même pour pouvoir évaluer la pression, nous supposerons cette enveloppe infiniment petite, ce qui permettra de regarder tous les points d'une même face, comme également pressés, et la densité D et les forces X, Y et Z, comme constantes dans cette étendue.

La fig. 126 représente le plan des xz; $Mabc$ est la projection de notre enveloppe. Pour simplifier les locutions, nous regarderons les projections des points comme étant les points eux-mêmes; on rectifiera aisément ces énonciations. M est le point dont les coordonnées sont x, y, z; p est la pression que le fluide y exerce sur tout élément de surface, quelle qu'en soit la direction; cette pression est rapportée à l'unité de surface : les arêtes du parallélipipède sont dx, dy et dz. Ainsi la face $Mc = dxdy$ reçoit la pression p$dxdy$ (268); de même la face $Ma = dzdy$ éprouve la pression p$dzdy$, etc. Celles qui sont exercées extérieurement sur les faces de l'angle trièdre M sont donc Fig. 126.

$$\text{p}dxdy, \qquad \text{p}dzdy, \qquad \text{p}dxdz.$$

Pour obtenir celle qu'éprouve la face ab, il faut changer z en $z+dz$ dans p, et on aura $\text{p} + \frac{d\text{p}}{dz}dz$ pour cette pression rapportée à l'unité de surface : de sorte que cette face reçoit l'effort $\left(p + \frac{dp}{dz}\,dz\right)dxdy$. En en disant autant des deux autres faces, on a pour ces pressions extérieures

$$\left(p + \frac{dp}{dz}\,dz\right)dxdy, \left(p + \frac{dp}{dx}\,dx\right)dzdy, \left(p + \frac{dp}{dy}\,dy\right)dxdz.$$

Regardons maintenant le parallélipipède $Mabc$ comme un vase, et la face Mc comme un piston soumis à la force p. Cette pression se distribuera dans tout le fluide intérieur, et combinée avec les forces X, Y, Z qui en poussent les molécules, elle agira sur chaque face avec la même intensité qu'on vient de déterminer pour la partie extérieure. La base du piston est $dxdy$, le fluide réagit sur elle avec la force $pdxdy$. De plus, les faces ressentent cette pression proportionnellement à leur étendue (α, 267); de sorte que la face Ma est pressée par le piston avec une force $= pdxdy \times \frac{Ma}{Mc} = pdzdy$; il en seroit de même pour les autres faces. Il faut à ces pressions ajouter (α, 267) celles qui proviennent des forces X, Y, et Z; comme elles tendent à accroître les coordonnées x, y et z, elles n'agissent pas sur les faces de l'angle trièdre M. Les pressions tant extérieures qu'intérieures sur ces trois faces ont donc mêmes valeurs, ce qui ne fournit aucune condition. Mais la face ab éprouve l'effort de Z, qui la presse à la manière d'un poids (221, 268); le volume du fluide est $dxdydz$, la masse est $Ddxdydz$; donc la pression causée par Z est $DZdxdydz$. On verra de même que celle que X exerce sur bc est $DXdxdydz$, etc. Comme ces pressions doivent être ajoutées à celles que transmet le piston Mc, on en conclut que les trois autres faces reçoivent les efforts intérieurs

$$(\mathrm{p}+DZdz)dxdy,\ (\mathrm{p}+DXdx)dzdy,\ (\mathrm{p}+DYdy)\,dxdz.$$

Egalant ces valeurs à celles ci-dessus, il vient

$$\frac{d\mathrm{p}}{dz}=DZ,\quad \frac{d\mathrm{p}}{dx}=DX,\quad \frac{d\mathrm{p}}{dy}=DY.$$

Multipliant ces équations respectives par dz, dx, dy, et ajoutant, comme $d\mathrm{p}=\frac{d\mathrm{p}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{p}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{p}}{dz}dz$, on a

$$d\mathrm{p}=D\,(Xdx+Ydy+Zdz)\ldots\ldots(\beta).$$

L'intégrale de cette équation donnera la valeur de la pression p en fonction de x, y et z.

271. Voici quelques remarques importantes.

I. Il est clair que $d\mathrm{p}$ étant une différentielle exacte, il doit en être de même de $D\,(Xdx+Ydy+Zdz)$: d'où

$$\frac{d.DX}{dy}=\frac{d.DY}{dx},\quad \frac{d.DX}{dz}=\frac{d.DZ}{dx},\quad \frac{d.DY}{dz}=\frac{d.DZ}{dy}.$$

Sans ces trois conditions les forces X, Y, Z ne seroient pas de nature à se faire équilibre, et le fluide seroit dans une agitation perpétuelle, sous quelque figure qu'on le disposât : mais si elles ont lieu, l'équilibre sera possible, et on saura intégrer par les quadratures l'équation (β) (*Cal. int. de* Lacroix, n°. 307), ce qui donnera la pression en un lieu quelconque du fluide. Du reste, cela ne suffira pas pour que l'équilibre ait lieu, il faudra en outre donner à la masse fluide une figure déterminée.

En exécutant les différentiations et multipliant ensuite les résultats par Z, $-Y$ et X respectivement, puis ajoutant, le facteur commun D disparoît et on a

$$X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Cette équation tient lieu d'une des précédentes et comme elle est indépendante de D, lorsqu'on ne connoitra pas la loi suivant laquelle la densité varie, on pourra cependant s'assurer en partie si l'équilibre est possible. Si la densité est constante, nos trois équations reproduisent les valeurs (e', 168).

II. A la surface libre du fluide, la pression doit visiblement être nulle ou constante; ainsi $dp=0$, d'où

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma).$$

Cette relation est en x, y et z celle qui convient à la surface : et comme on a vu qu'on savoit l'intégrer, on aura l'équation de la surface libre du fluide, ce qui est une nouvelle condition d'équilibre. L'équation (γ) convient encore aux surfaces pour lesquelles la pression est la même, ainsi elle appartient à toutes les *couches d'égale pression*. Ces surfaces ne diffèrent que par la constante de l'intégration, parce que la pression est bien la même pour tous les points d'une même couche, mais elle varie d'une couche à l'autre.

III. La normale à ces surfaces fait avec les axes des angles dont les cosinus sont $\frac{X}{M}$, $\frac{Y}{M}$, $\frac{Z}{M}$, en faisant $M=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$; voyez l'*Appl. de l'anal. à la géom.* de Monge, n°. 1. Or la direction de la résultante des forces X, Y, Z fait aussi avec les axes des angles qui ont pour cosinus ces mêmes valeurs (H, 24) donc l'équation (γ) revient à dire que la résultante des forces est normale à la surface de la couche d'égale pression : ce qui est d'ailleurs visible pour la surface extérieure.

IV. Si la densité n'est pas uniforme, on a trouvé les conditions qui expriment que $D(Xdx + Ydy + Zdz)$ est une différentielle exacte. Mais s'il arrivoit qu'alors..... $Xdx + Ydy + Zdz$ fût encore une différentielle exacte $d\psi$, on auroit $\frac{dp}{D} = d\psi$; de sorte que pour les couches d'égale pression, on auroit encore la même équation (γ), ou $\psi = 0$, et de plus D devroit être une fonction de p; il en résulte que la densité et la pression ne variant qu'ensemble, le fluide seroit disposé par couches d'égale pression et de même densité; nos conséquences précédentes auraient encore lieu.

272. Faisons des applications de nos formules.

1°. Supposons que les molécules fluides soient toutes sollicitées par des forces dirigées vers un point fixe, pris pour origine : soit r la distance du centre d'attraction au point qui a x, y et z pour coordonnées, ce qui donne $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; cette ligne r fait avec les trois axes des angles dont les cosinus sont $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et $\frac{z}{r}$. Désignons par φ la force qui agit sur la molécule placée au point dont nous parlons; $\frac{\varphi x}{r}$, $\frac{\varphi y}{r}$ et $\frac{\varphi z}{r}$ sont ses composantes dans le sens des axes; on doit les prendre négativement, parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées; et il faut substituer ces valeurs dans les équations précédentes, à X, Y et Z.

On peut d'abord aisément reconnoître que les équations (e', 168) sont satisfaites; ainsi l'équilibre est possible dans le système, lorsque la densité est constante ou lorsqu'elle est fonction de la pression seule. De plus l'équation (γ) devenant $xdx + ydy + zdz = 0$, en supprimant le facteur commun $-\frac{\phi}{r}$, on obtient, en intégrant, $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$. Comme cette équation est celle d'une sphère qui a C pour rayon, on en conclut que la masse fluide devra affecter la forme sphérique, pour que l'équilibre puisse exister en vertu des forces ϕ qui animent ses molécules. Telle seroit la figure des planètes, si elles avoient été originairement fluides, et si le mouvement de rotation qui les anime n'avoit déterminé une force centrifuge dont l'effet a dû les aplatir vers leurs pôles et les élever à l'équateur. De plus, si la densité n'est pas uniforme, le fluide devra être disposé par couches sphériques et concentriques, d'égale densité.

Supposons que la force d'attraction ϕ soit proportionnelle à la puissance n de la distance r au centre, et que la densité D soit constante : on a $\phi = Ar$, ce qui change l'équation (β) en $p = AD\int r^{n-1}(xdx + ydy + zdz)$; or $xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2} d(r^2) = rdr$; donc

$$p = AD\int r^n dr = \frac{AD}{n+1} \times \sqrt{\{x^2 + y^2 + z^2\}}^{r+1} + C.$$

2°. Lorsque les molécules fluides ne sont soumises à d'autre force qu'à la gravité, en prenant l'axe des z vertical, et les z positifs de haut en bas, on a $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = g$. On voit que les équations (e') étant satisfaites, l'équilibre est possible; que de plus l'équation (γ) se réduisant à $gdz = 0$, ou $z = \text{const.}$, la surface supérieure du fluide est parallèle au plan xy, c'est-à-dire horisontale, lorsque l'équilibre a lieu. Enfin la valeur de la pression en un point quelconque du fluide est

$$p = \int Dgdz \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta).$$

Cette équation a lieu pour tous les fluides pesans. Lorsque la densité D est constante (les fluides incompressibles et homogènes), ou qu'elle est fonction de z seul, on remarque que la pression ne varie qu'avec la hauteur z; ce qui fait voir que *toutes les molécules qui sont situées sur un même plan horisontal sont également pressées, et réciproquement;* résultat conforme à ce qu'on a vu (271, II). Ces diverses propriétés des fluides pesans servent de base à une foule de considérations importantes qu'il convient de développer; c'est ce qui va nous occuper.

273. On distingue deux sortes de fluides : les uns, tels que l'eau, le vin, le mercure..., sont *incompressibles;* leur densité est constante; on les nomme *Liquides;* les autres sont compressibles et *aériformes;* on les appelle *Fluides élastiques*, parce qu'ils ont aussi la faculté de se rétablir : tels sont les gaz et l'air atmosphérique. Nous allons successivement examiner les propriétés de ces deux sortes de fluides.

CHAPITRE II.

DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET PESANS.

I. *Des Syphons et Niveaux; pressions exercées sur les parois planes des vases.*

274. PUISQUE la surface du fluide est horisontale, quelle que soit la figure du vase qui le contient, on voit que si plusieurs tuyaux de courbure arbitraire se communiquent entre eux, le fluide pesant qui y sera renfermé devra s'élever dans chacun à la même hauteur. On a donné à

ce système le nom de *Syphons*, et c'est sur ce principe que la construction du *Niveau d'eau* est fondée. Cet instrument, qui n'est qu'un syphon à deux branches, consiste en un canal *EF* plus ou moins long, aux extrémités duquel sont lutées deux fioles recourbées *AE*, *BF*; si on verse de l'eau dans l'une d'elles, ce fluide, après avoir empli le canal *EF*, s'élèvera dans la fiole *BF*, et toute droite qui passera par les deux surfaces *A* et *B* sera horisontale. On adapte à cet assemblage un pied en *C*, afin de pouvoir se servir par-tout de cet instrument, dont l'usage est trop connu pour que nous nous y arrêtions ici.

Fig. 127.

Fig. 128. 275. L'instrument appelé *Niveau à bulle d'air* est fondé sur le même principe et remplit le même objet : il est composé d'une boîte *CD* de métal, qui renferme un tube de verre, et le recouvre entièrement, à l'exception d'une partie qu'on voit paroître par une ouverture ou fenêtre *de* pratiquée à la boîte *CD*. Le tube, fermé hermétiquement, contient une liqueur, qui est ordinairement de l'alkool ou de l'éther, et qui, n'en remplissant pas entièrement la capacité, laisse un petit vide *ab* occupé par l'air. L'instrument doit être disposé de manière que, lorsque les extrémités *a* et *b* de la bulle d'air sont également distantes d'un point *m* qui a une position constante sur le tube, l'axe soit horisontal. Ce point milieu n'est pas marqué sur le tube; mais il y a de chaque côté, et dans l'espace où les extrémités de la bulle se trouvent renfermées, dans différentes températures, un certain nombre de divisions égales qui y sont numérotées, et on règle l'instrument de manière que son axe soit horisontal, quand les extrémités de la bulle sont sur deux divisions de même numéro.

On adapte souvent à cet instrument une lunette, dont l'axe optique est parallèle à l'axe du niveau; et pour donner plus de sensibilité à l'instrument, on travaille intérieurement le tube de verre, de manière que sa section longitudinale intérieure soit un arc de cercle. Nous ne pouvons entrer ici en détail sur la propriété du niveau, les procédés de nivellement, les corrections des réfractions, etc. On peut consulter à cet égard l'*Architecture hydraulique*, n°. 546.

276. Lorsque la densité D est constante, comme on peut prendre pour le plan xy la surface du fluide (ce qui force à compter les z positifs de haut en bas), l'équation (δ) devient

$$p = C + Dgz.$$

De plus, lorsqu'on fait $z = 0$, on a $p = C$; donc C est la pression exercée sur chaque unité de la surface du fluide; elle répond au poids de l'atmosphère, et est nulle quand on en fait abstraction. On peut représenter C par le poids d'un prisme du même fluide, en donnant à ce prisme la hauteur h, et une base égale à l'unité : alors on a $Dgh = C$, puisque h est le volume de ce prisme, Dh sa masse (50), et Dgh son poids (221). Ainsi l'équation précédente équivaut à

$$p = Dg(h + z) = \pi(h + z) \ldots\ldots\ldots (\iota),$$

en faisant $Dg = \pi$. La valeur de h sera d'ailleurs connue lorsqu'on aura Dg et C : de plus π est *le poids absolu de l'unité de volume* du fluide; c'est ce qu'on nomme sa PESANTEUR SPÉCIFIQUE. Lorsqu'on ne considère qu'un fluide, on peut prendre sa densité pour unité et faire $D = 1$: car D n'étant (51) que le rapport de la densité d'une substance à celle d'une autre qu'on regarde comme terme de comparaison; on peut prendre pour celle-ci le fluide même: alors π devient $= g$. Nous donnerons bientôt la valeur de la pesanteur spécifique pour chaque espèce de substance (295).

277. Puisque la pression exercée dans toute l'étendue d'un plan horisontal est la même, il en résulte que celle qu'éprouve une surface horisontale A, dont Z est l'enfoncement dans le fluide, est (267), $\pi A(Z+h)$. Cette valeur se compose de la pression πAh qui seroit éprouvée à la surface du fluide, et de celle πAZ qui est le poids d'un volume de fluide égal à AZ. Ainsi en faisant abstraction de la première partie, on voit que *la pression qu'éprouve l'aire horisontale* A, *est le poids d'un prisme de fluide qui a cette aire* A *pour base, et pour hauteur sa distance à la surface du fluide.*

Cette conséquence s'applique immédiatement à la pression exercée sur le fond horisontal des vases; il en résulte un fait assez singulier. Si on a trois vases dont les fonds horisontaux soient égaux, et dans lesquels un même fluide incompressible soit contenu et s'élève à même hauteur; la pression sera égale sur les fonds de ces vases, dont la forme est d'ailleurs arbitraire. Ainsi cette pression sera moindre ou plus grande que le poids du fluide qui y est renfermé, ou même égale à ce poids, suivant que le vase sera un tronc de cône renversé ou droit, ou sera un cylindre. On doit donc bien distinguer le poids du fluide de la pression.

278. Lorsqu'un vase est destiné à contenir une grande masse de fluide, les parties les plus enfoncées supportent une plus forte pression. Si donc on assemble des tuyaux verticaux pour élever l'eau ou tout autre fluide, c'est se jetter dans une dépense superflue que de donner la même épaisseur à toutes les parties. Car si les inférieures ont une épaisseur suffisante, comme elles doivent l'avoir en

effet, les parties supérieures en ont nécessairement trop. Il convient donc alors d'avoir des tuyaux d'assemblage de même diamètre intérieur, mais d'épaisseurs différentes : de placer en bas les tuyaux les plus épais, et successivement les autres, à raison des différentes hauteurs de l'eau.

Pour trouver en général l'épaisseur que doivent avoir les tuyaux de conduite, il faudroit, par des expériences faites avec exactitude, déterminer la force d'adhérence des différentes substances qu'on emploie pour former ces tuyaux. Nous nous écarterions trop de notre objet en traitant ici cette matière, sur laquelle on peut consulter l'*Hydrodynamique* de Bossut.

279. Cherchons maintenant la pression exercée par un fluide pesant et incompressible sur une surface plane, qui y est disposée d'une manière quelconque : cela s'applique naturellement aux parois latérales des vases, et même à leurs fonds, lorsqu'ils ne sont pas horisontaux. Si on prend seulement un des élémens a' de la surface en question, l'équation (ε) donne pour la pression qu'exerce le fluide sur cet élément a' (267), $pa' = \pi a'z$, en faisant abstraction de la pression exercée à la surface supérieure du fluide, laquelle se distribue également sur tous les points de la surface pressée, quelle qu'en soit l'inclinaison (269). Cela posé, nommons a', a''..... les divers élémens de cette surface; z', z''.... leurs distances à la surface supérieure du fluide, qui est le plan des xy; on aura $\pi a'z'$, $\pi a''z''$.... pour les pressions qu'ils éprouvent. Ces pressions forment un système de forces normales au plan qu'on considère; leur résultante R sera visiblement égale à leur somme, car ces forces sont parallèles entre elles; elle sera donc

$$R = \pi(a'z' + a''z'' + \text{etc.}).$$

Désignons par A l'étendue de la surface pressée, on a $A = a' + a'' + \ldots\ldots$ De plus $a'z'$, $a''z''\ldots\ldots$ sont les momens, par rapport au plan de la surface du fluide, des élémens a', $a''\ldots\ldots$ qui composent l'aire A. Or en désignant par Z la distance du centre de gravité de cette aire à la surface supérieure du fluide, on a (A', 54) $AZ = a'z' + a''z'' + \ldots\ldots$ donc on a $R = \pi AZ$ pour la pression cherchée. Or AZ est le volume d'un prisme qui a A pour base et Z pour hauteur : de plus π est la pesanteur spécifique du fluide, ou le poids de l'unité de volume de ce fluide (276); donc *la résultante des pressions qu'exerce un fluide pesant sur une surface plane qui y est plongée et dans une position quelconque, est le poids d'un prisme de ce fluide qui a pour base cette surface, et pour hauteur l'enfoncement de son centre de gravité dans le fluide.*

Il est important de remarquer que toutes les surfaces planes plongées dans un fluide, éprouvent des pressions égales lorsque les aires sont égales, pourvu que les enfoncemens de leurs centres de gravité soient les mêmes. Donc *toute surface plane, plongée dans un fluide, éprouve des pressions, dont la résultante ne change pas de grandeur, lorsqu'on fait mouvoir cette surface autour de son centre de gravité; et on peut la disposer horisontalement.* Cette résultante change d'ailleurs de direction et de position.

280. Le *centre de pression* est le point par lequel passe la résultante : ce centre est facile à assigner, d'après ce qu'on a dit (36), puisqu'il ne s'agit que de connoître la position de la résultante d'un système de forces parallèles. Supposons que chacune des pressions élémentaires devienne horisontale, ce qui ne change rien au point d'application de la résultante (37). Soit z l'enfoncement du centre de pression, il ne s'agit que d'égaler le moment Rz de la

résultante, par rapport à la surface du fluide, à la somme des momens $\pi a'z'^2$, $\pi a''z''^2$..... des pressions élémentaires $\pi a'z'$, $\pi a''z''$...... ce qui donne .... $Rz = \pi AZz = \pi(a'z'^2 + a''z''^2 + ...)$ ou $AZz = S.a'z'^2$. Ainsi la distance z du centre de pression à la surface du fluide est

$$z = \frac{S.a'z'^2}{AZ} = \frac{\pi}{R} \times S.a'z'^2 \ldots\ldots\ldots (\eta).$$

Pour faire usage de cette formule, il faudra exprimer l'aire élémentaire a' en fonction des différentielles des coordonnées; mettre pour z'^2 sa valeur donnée en x et y par l'équation du plan pressé, et intégrer $a'z'^2$ dans les limites déterminées par la figure de l'aire plane qu'on considère. Cette formule (η) ne fait d'ailleurs connoître le centre de pression que dans le cas où on connoît *à priori* une ligne qui le contient, ce qui a lieu lorsque l'aire pressée est partagée en deux portions symétriques par un plan vertical : mais dans tout autre cas, il faut en outre prendre les momens des pressions élémentaires $\pi a'z'$, $\pi a''z''$.... par rapport à un plan vertical, perpendiculaire à celui qu'on vient de considérer : en opérant comme ci-dessus, on obtient la distance du centre de pression à ce plan vertical, et par conséquent sa position.

281. En général, toute cette théorie s'applique à la poussée des eaux stagnantes contre les digues qui s'opposent à leur écoulement. Consultez à ce sujet l'*Architecture hydraulique* de Prony, pag. 279, et les *Recherches sur la construction des Digues*, par Bossut et Viallet.

Nous nous bornerons ici à appliquer ces principes généraux à la pression contre la vanne verticale et rectangulaire d'une écluse : soit m son côté horisontal, n sa hauteur depuis la partie inférieure jusqu'au niveau de l'eau.

On a $A = mn$; et comme le centre de gravité est au milieu de la hauteur n, $Z = \frac{1}{2} n$. Il suit de là que, 1°. la pression est $R = \frac{1}{2} \pi mn^2$; 2°. le centre de pression est visiblement sur la ligne verticale qui passe par le milieu de la base m; 3°. en prenant pour élément a' un rectangle horisontal qui ait dz' pour sa hauteur, et m pour sa base, on a $a' = mdz'$: ainsi $S.a'z'^2 = S.mz'^2dz' = \frac{1}{3} mz'^3$. Or les limites sont $z' = 0$ et $z' = n$; cette intégrale devient donc $\frac{1}{3} mn^3$: ainsi on a pour l'enfoncement du centre de pression $z = \frac{2}{3} n$.

Nous allons exposer la théorie de l'équilibre des corps flottans, après quoi nous traiterons des pressions exercées sur les surfaces courbes des vases.

II. *Conditions d'équilibre des corps flottans; pressions exercées sur les parois courbes.*

282. Examinons maintenant ce qui arrive lorsqu'un corps flotte sur un fluide pesant. Prenons sur la surface un élément a; la pression normale qu'il éprouve est $Dgaz = \pi az$, (ε). Cette pression infiniment petite ne doit point être intégrée dans l'étendue du corps, puisque les pressions n'étant pas parallèles, ne doivent point avoir leur résultante égale à leur somme. Il faut donc avant tout décomposer cette pression en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires; puis ensuite procéder à l'intégration. Or la normale est perpendiculaire au plan tangent, et l'axe des z l'est au plan xy; donc ces droites font entre elles le même angle que ces plans : ainsi pour obtenir la composante parallèle aux z de la pression élémentaire, il faut multiplier πaz par le cosinus de l'angle que forme le plan tangent avec le plan xy; or le produit de a par ce cosinus n'est autre chose que la projection de a sur ce

plan : la même chose ayant lieu pour les axes des x et des y on conclut que *les composantes de la pression élémentaire parallèles à chaque axe, sont les produits de πz, par la projection de l'élément sur le plan coordonné qui est perpendiculaire à cet axe.*

Cela posé, concevons le prisme parallèle aux x et dont l'élément a est la base; c'est le prisme projettant cet élément sur le plan yz. Les plans de ses faces détermineront sur le corps plongé un autre élément, opposé à celui qu'on considère, et qui ayant même z et même projection sur le plan yz éprouvera aussi une même pression parallèle aux x, quoique dirigée en sens contraire de la première; et comme on peut en dire autant de tous les élémens de la surface, il en résulte que les pressions parallèles aux x s'entredétruisent. Il est visible que la même chose a lieu dans le sens des y; donc *toutes les pressions que le fluide exerce sur chaque section horisontale du corps plongé se détruisent mutuellement.*

Venons-en aux pressions verticales; concevons de même le prisme projettant l'élément a sur le plan xy, et désignons par ω cette projection qui sert de base au prisme; $\pi z \omega$ sera la pression élémentaire dans le sens des z; elle est égale au poids d'un filet de fluide, d'un volume égal à celui du prisme dont nous venons de parler. Projettons la partie plongée du corps sur le plan des xy, qui est la surface du fluide : le cylindre projettant aura pour base cette projection; il embrassera le corps et le touchera suivant une courbe : n'ayons d'abord égard qu'aux pressions éprouvées par les élémens situés à la partie inférieure de cette courbe. Elles forment visiblement une série de forces verticales, dirigées de bas en haut; chacune d'elles est égale au poids du prisme de fluide dont nous venons de parler. Mais une partie de ces pressions sera diminuée par celles qui sont exercées sur les élémens placés au-dessus de la courbe, car elles agissent en sens contraire : si même le corps étoit entièrement plongé, il faudroit les diminuer toutes du poids du filet de fluide supérieur. De sorte que la force qui en résultera sera simplement la différence des poids de ces filets de fluide.

Il résulte de là qu'on peut faire abstraction des pressions qui ont lieu à la partie supérieure du corps, pourvu qu'on regarde celles qui sont exercées à la partie inférieure comme égales au poids d'un prisme de fluide d'un volume égal au filet du corps plongé qui répond au-dessus de l'élément qu'on considère. Donc, *un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide pesant et en équilibre, éprouve des pressions dont la résultante est verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du fluide que le corps déplace : cette résultante passe d'ailleurs par le centre de gravité du fluide déplacé*, car toutes les composantes étant assimilées à des poids, elle doit passer par le centre de gravité de leur système (*). (M. *Poisson* m'a communiqué cette démonstration.)

283. Nous avons jusqu'ici fait abstraction du poids du corps : or ce poids est une force verticale dirigée de haut en bas, et agissant au centre de gravité du corps : cette force est donc opposée à la poussée du fluide. Donc,

---

(*) On peut se rendre raison *à priori* de cette conséquence : en effet, supposons qu'une force agissant sur un corps non pesant le retienne en équilibre plongé en tout ou en partie dans un fluide pesant. Si on remplace la portion plongée du corps par un segment égal de fluide devenu solide, l'équilibre subsistera visiblement sans le secours d'aucune force. Donc le poids de ce solide sera égal à la pression du fluide, c'est-à-dire à la force qui retient le corps plongé en équilibre. Donc, etc.

le poids d'un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide, est diminué du poids d'un volume de fluide égal à celui qu'il déplace.

Quand il arrive que le poids du corps est égal à celui du fluide déplacé, les deux forces ne s'entredétruisent que lorsqu'elles sont directement opposées (10), ce qui exige que les centres de gravité du corps et du fluide déplacé soient dans la même verticale. Ainsi *pour qu'un corps pesant puisse flotter en équilibre sur un fluide, il faut deux conditions*, 1°. *que le poids entier du corps soit égal au poids du volume de fluide déplacé*; et 2°. *que la droite qui passe par les centres de gravité du corps et du fluide déplacé soit verticale.*

284. Soient Π et π les pesanteurs spécifiques respectives d'un corps et d'un fluide; V le volume du corps, v celui du fluide qu'il déplace, πv sera le poids du fluide déplacé, et représentera la pression totale exercée sur le corps : ΠV sera le poids du corps; et il se présente ici trois cas.

1°. Si l'équilibre subsiste, alors on a

$$\pi v = \Pi V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Cette équation exprime l'une des deux conditions nécessaires pour que l'équilibre ait lieu. On remarque que si le corps est entièrement plongé dans le fluide, comme $v = V$, il faut alors que $\pi = \Pi$, c'est-à-dire que le corps doit avoir la même pesanteur spécifique que le fluide : dans ce cas l'équilibre a lieu, quelle que soit la position du corps dans le fluide, car le centre de gravité du corps est le même que celui du fluide déplacé. La réciproque est vraie.

2°. Si on a $\pi v > \Pi V$; alors le corps doit remonter, car la poussée du fluide surpasse le poids du corps de $\pi v - \Pi V$.

Or dans ce cas v étant la seule quantité qui varie lorsque le corps remonte, on voit qu'il doit arriver un instant où $\varpi v = \Pi V$; de sorte qu'après plusieurs oscillations verticales, si les centres de gravité du corps et du fluide déplacé se trouvent toujours dans la même verticale, le frottement doit rétablir l'équilibre. Observons que le cas présent exige toujours que la pesanteur spécifique du corps soit plus petite que celle du fluide, car on a toujours $v < V$.

5°. Enfin si on a $\varpi v < \Pi V$ le corps devra descendre, et son poids sera réduit à $\Pi V - \varpi v$: mais comme v croît à mesure que le corps descend, il est clair que l'on parviendra à avoir $\varpi v = \Pi V$, si Π est $< \varpi$; et comme v ne peut surpasser V, on sait que l'état d'équilibre n'est jamais possible lorsque ϖ est $< \Pi$. Le corps descend alors jusqu'à ce qu'il trouve un obstacle qui l'arrête.

Ainsi il n'y a que les corps dont la pesanteur spécifique est moindre que celle de l'eau, qui puissent flotter sur ce fluide. Cependant on doit observer que lorsque les corps ne sont pas homogènes, ou lorsqu'ils ont intérieurement une capacité vide, il faut alors remplacer Π par une pesanteur spécifique moyenne. Ainsi il n'y a pas de substance qu'on ne puisse faire surnager, car on peut l'unir à une autre dont la pesanteur spécifique soit moindre ou lui donner une forme concave qui puisse satisfaire à l'équation (6). Le fluide se déprime autour des corps qui ne sont point de nature à être mouillés : alors le volume plongé doit être augmenté du vide produit par cette dépression : c'est ce qui explique pourquoi une aiguille enduite de cire, peut flotter sur l'eau, quoique plus pesante que ce fluide. Voyez le mémoire de M. Laplace.

285. Dans tout ce qui vient d'être dit nous avons fait abstraction du poids de l'atmosphère : mais les résultats n'en sont pas moins exacts. Car il est facile de traiter en

particulier la pression qu'il produit. En faisant de nouveau tous les raisonnemens développés dans les articles précédens, mais remplaçant ϖz par la pression constante P, il sera aisé d'en conclure que *lorsqu'un corps pesant est plongé dans un fluide en équilibre, si on applique une force qui agisse sur le fluide à l'aide d'un piston, l'équilibre ne sera nullement altéré.* Consultez le n°. 269 qui rend bien raison de ce théorême.

286. Nous avons vu (283) qu'il faut essentiellement deux conditions pour qu'un corps puisse flotter en équilibre sur un fluide : or, par la propriété des centres de gravité (33 et 52, 4°.), la droite qui joint les centres de gravité d'un corps et d'un segment formé par un plan quelconque, doit aussi passer par celui de l'autre segment : dans le cas que nous traitons ici, le plan coupant est la surface même du fluide, qu'on nomme *plan de flottaison ;* on en conclut que pour qu'un corps soit en équilibre sur un fluide spécifiquement plus pesant que lui, il faut que la droite qui passe par les centres de gravité du corps et d'un des segmens formés par le plan de flottaison, soit perpendiculaire à ce plan. Ainsi le problême général de la recherche des positions d'équilibre d'un corps homogène est réduit au suivant : *couper par un plan, un corps de figure donnée, de manière que la ligne droite qui passe par le centre de gravité du corps et par celui de l'un des segmens, soit perpendiculaire au plan coupant ; et de plus que le volume de l'un des segmens, soit à celui du corps entier dans un rapport donné.* Ce rapport est assigné par l'équation (*I*). En mettant donc cette double condition en équation, les positions d'équilibre d'un corps seront données par des racines qui en indiquent le nombre. Nous ne pouvons nous occuper ici de la résolution de ce problême qui ne

dépend que de la géométrie. Consultez la *Mécanique philosophique*, pag. 244.

287. Il résulte de ce qu'on vient de dire, que les prismes et les cylindres droits, homogènes et à base quelconque, ont deux positions d'équilibre manifestes, en disposant verticalement la ligne génératrice et en plongeant tour-à-tour chacune des bases dans le fluide. La même chose a lieu aussi pour les solides de révolution et pour les corps symétriques, par rapport à une ligne, en plaçant cette ligne verticalement.

De plus les prismes et cylindres droits, et en général tous les corps susceptibles d'être coupés par un plan en deux segmens symétriques, ont des positions d'équilibre dans lesquelles ce plan est vertical. Pour trouver ces positions, il suffit de considérer seulement celles de l'aire résultant de l'intersection du corps par ce plan.

Fig. 129 et 130. 288. Un exemple simple suffira pour faire voir cette dernière proposition, et comment différentes positions d'équilibre d'un corps sont données par une même équation. Supposons que le solide est un prisme triangulaire homogène et droit, dont les arêtes sont horisontales et dont la base est le triangle SEG : XX' est le plan de flottaison. Il faut considérer deux cas; 1°. celui (fig. 129) où les bases de ce prisme ont un angle S plongé dans le fluide, et deux angles G, E hors de ce fluide; 2°. le cas inverse (fig. 130). Nous allons traiter à-la-fois ces deux circonstances, parce que le calcul en est le même.

Pour connoître la ligne MN suivant laquelle le plan XX' coupe le triangle, il faut trouver $SM = x$, et $SN = y$. Soit P le milieu de EG; les données sont $SE = a$, $SG = b$, $SP = k$, $PSE = m$, $GSP = n$.

Désignons par r le rapport $\frac{\Pi}{\pi}$ de la pesanteur spécifique Π

du corps à celle ϖ du fluide, l'équation (θ) donne

Dans le premier cas (fig. 129) ... $r.SEG = SMN$.

Dans le second cas (fig. 130) ... $r.SEG = GEMN$.

Or les deux triangles SMN, SEG ont l'angle S commun, et on a (prop. 24, liv. 3, *Géom.* de Legendre; et n°. 64, *Géom.* de Lacroix)

$$\frac{SMN}{SEG} = \frac{SM \times SN}{SG \times SE} = \frac{xy}{ab},$$

d'où $$\frac{SEG - SMN}{SEG} = \frac{GNME}{SEG} = \frac{ab - xy}{ab};$$

on a donc $xy = rab$, ou $xy = ab\,(1 - r)$ .....(1).

Il s'agit maintenant de satisfaire à la seconde condition (283); c'est-à-dire que les centres de gravité de SEG et du fluide déplacé (SMN, fig. 129, ou $GNME$, fig. 130) soient dans la même verticale. Si on prend $PR = \frac{1}{3} PS$, R sera (58) le centre de gravité du triangle SEG; de même si Q est le milieu de MN, et si $QO = \frac{1}{3} QS$, O sera le centre de gravité du triangle SMN : la droite RO, ou sa parallèle PQ, doit donc être verticale dans le cas d'équilibre, c'est-à-dire que $PM = PN$ exprimera cette condition. Abaissons du point P les perpendiculaires PA et PD, sur SE et SG. On a

$$PA = k \sin m\,,\quad PD = k \sin n$$
$$SA = k \cos m\,,\quad SD = k \cos n.$$

Donc $AM = x - k \cos m$, et $ND = k \cos n - y$: or $PM = PN$, donne $AP^2 + AM^2 = PD^2 + ND^2$. En substituant et réduisant on a

$$x^2 - 2kx \cos m = y^2 - 2ky \cos n.$$

Pour trouver les positions d'équilibre, il faut donc éliminer x et y entre cette équation et l'une des deux valeurs n°. (1) : et comme la seconde se déduit de la première en y changeant r en $1-r$, il est aisé de ne faire qu'une élimination; ce qui donne, suivant qu'il s'agit de la fig. 129 ou de la fig. 130,

$$\left.\begin{array}{l} x^4-2kx^3\cos m+2abkrx.\cos n-r^2a^2b^2=0\ldots\ldots \\ x^4-2kx^3\cos m+2(1-r)abkx\cos n-(1-r)^2.a^2b^2=0 \end{array}\right\}\ldots(2).$$

Ces équations sont du quatrième degré et ont au moins deux racines réelles, à cause du dernier terme qui est négatif (*Alg.* de Lacroix, n°. 219) : mais ces racines peuvent être toutes les quatre réelles, et alors la disposition des signes indique (*Comp. d'alg.* de Lacroix, p. 91), par la règle de *Descartes*, que trois des racines sont positives, et que la quatrième est négative. Cette dernière racine est inutile au cas présent; car la pesanteur n'agissant jamais que de haut en bas, la droite SM ne peut être placée que d'un seul côté par rapport au point S; de sorte qu'on ne peut porter la valeur de x sur le prolongement de MS. Il y aura donc une ou trois positions d'équilibre qui seront données par les racines positives des équations (2) : les valeurs correspondantes des y seront données par les équations (1). On devra cependant avoir $x<a$, et $y<b$.

289. Appliquons ces raisonnemens au triangle isocèle, afin de pouvoir pousser le calcul jusqu'au bout : ne considérons que le cas où il n'y a qu'un seul angle du triangle plongé dans le fluide. On a donc ici $m=n$, et $a=b$: ce qui donne

$$xy=a^2r,\text{ et } x^4-2kx^3\cos m+2a^2rkx\cos m-r^2a^4=0.$$

Les facteurs du second degré de cette dernière étant $x^2 - a^2r = 0$, et $x^2 - 2kx\cos m + a^2r = 0$, on en conclut, en ne prenant que les racines positives,

$$x = a\sqrt{r}, \text{ et } x = k\cos m \pm \sqrt{(k^2\cos^2 m - a^2 r)};$$

d'où $y = x$, et $y = k\cos m \mp \sqrt{(k^2\cos^2 m - a^2 r)}$.

La première racine indique qu'il y a une position d'équilibre en supposant EG horisontal. Cela s'applique aussi au cas de la fig. 130. Les autres positions sont données par les deux autres racines, mais elles doivent satisfaire à des conditions remarquables : car x et y doivent être $< a$; ou $a - k\cos m > \pm \sqrt{(k^2\cos^2 m - a^2 r)}$; en carrant et réduisant, et observant de plus que chaque radical doit être réel, on obtient pour r les deux limites

$$r > \frac{2k\cos m - a}{a}, \quad r < \frac{k^2\cos^2 m}{a^2}.$$

On aura de même les limites pour le second cas, en changeant r en $1 - r$; elles sont Fig. 13a.

$$r < \frac{2a - 2k\cos m}{a}, \text{ et } r > \frac{a^2 - k^2\cos^2 m}{a^2}.$$

Ces conditions doivent être satisfaites pour qu'il y ait trois positions d'équilibre : sans cela, il n'y auroit que celle qui est donnée par l'équation $x = y = a\sqrt{r}$.

Lorsque le triangle est équilatéral, m est le tiers d'un angle droit, d'où on tire $\cos m = \sqrt{\frac{3}{4}}$: ainsi........ $k = SE \times \cos m = a.\sqrt{\frac{3}{4}}$; donc $k\cos m = \frac{3}{4}a$: donc les limites ci-dessus deviennent

premier cas $r > \frac{1}{2}$ et $r < \frac{9}{16}$; second cas $r < \frac{1}{2}$ et $r > \frac{7}{16}$.

290. Lorsqu'un corps flottant est en équilibre, nous

savons que si on lui ajoute un poids P, il doit enfoncer dans le fluide : supposons que les centres de gravité du corps et du fluide déplacé restent dans une même verticale, proposons-nous de déterminer la hauteur z de l'enfoncement. Soit K l'aire de la section du corps par le plan de flottaison dans la seconde position d'équilibre, c'est-à-dire lorsque l'enfoncement est opéré. Il est clair que K est une fonction de z donnée par la forme du corps et sa disposition sur le fluide dans le premier état d'équilibre. Kdz est la tranche élémentaire du corps ; de sorte que $\int Kdz$ est le volume de la partie du corps qui s'est enfoncée, en prenant l'intégrale depuis $z = 0$: donc le poids du fluide déplacé par cet enfoncement est $\pi\int Kdz$, π étant la pesanteur spécifique du fluide. Il est manifeste que ce poids doit être égal à celui P qu'on a ajouté : ainsi on a

$$P = \pi\int Kdz \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Pour faire usage de cette formule, on y substituera pour K sa valeur en fonction de z, et l'intégrale étant prise depuis $z = 0$, on en déduira z, ou la hauteur de l'enfoncement.

Cette théorie s'applique principalement aux corps symétriques par rapport à un axe vertical (287), tels que les corps de révolution ; parce que les centres de gravité du corps et du fluide déplacé sont alors sur cet axe. L'équation de la courbe génératrice du corps de révolution est $y = fz$; en supposant que l'origine est au point où l'axe est coupé par le plan de flottaison primitif : K est l'aire d'un cercle dont l'ordonnée y est le rayon ; ainsi $K = cy^2$, (c étant le rapport du diamètre à la circonférence) l'équation (1) devient donc

$$P = \pi c\int y^2 dz.$$

Par exemple, soit un paraboloïde de révolution, d'abord placé dans une position d'équilibre, l'axe étant vertical; on a pour l'équation de la parabole $y^2 = m(a+z)$, m étant le paramètre et a désignant la distance du sommet au plan de flottaison. Ainsi on a $P = \frac{1}{2}\pi cm(a+z)^2 + C$; et comme $P = 0$, donne $z = 0$, on a $C = -\frac{1}{2}\pi cma^2$; donc enfin $z = -a \pm \sqrt{\left\{\frac{2P}{\pi cm} + a^2\right\}}$. Le signe inférieur se rapporte au cas où on auroit au contraire ôté le poids P.

291. La formule (ι) peut encore s'appliquer aux prismes et cylindres droits à base quelconque, dans les cas où la génératrice est horisontale ou verticale. En effet, dans le premier cas, il suffit d'avoir égard à la base qui est une courbe plane dont l'équation est donnée; alors K est simplement l'aire du rectangle qui résulte de l'intersection de ce cylindre par le plan de flottaison dans le second état d'équilibre. Si au contraire la génératrice est verticale, K est l'aire constante de la base, et on a simplement $P = \pi Kz$, d'où $z = \frac{P}{\pi K}$.

Ainsi pour le cylindre droit à base parabolique, dont la génératrice est horisontale et h la longueur, on a encore ici $y^2 = m(a+z)$; d'où on voit que $K = 2h\sqrt{m}.\sqrt{(a+z)}$, ce qui donne pour la formule (ι), ...

$P = \frac{4}{3}\pi h\sqrt{m}\left\{(a+z)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right\}$, d'où il faudra déduire la valeur de z. Si au contraire ce cylindre a sa génératrice verticale, comme on sait que la base est un segment parabolique dont l'aire est $K = \frac{2}{3}hk$, h et k étant les deux plus grandes dimensions de ce segment, on a $z = \frac{3P}{2\pi hk}$.

On observe que tout ce qui vient d'être dit s'applique également au cas où l'on ôteroit au contraire un poids P au corps flottant.

292. Evaluons maintenant les pressions exercées sur la paroi courbe d'un vase.

On a vu (282) qu'on doit décomposer la pression élémentaire parallèlement aux axes des z, y et x, et que les composantes sont les produits de πz par les projections de l'élément de surface sur les plans des xy, xz et yz, projections qui sont respectivement les rectangles différentiels $dxdy$, $dxdz$ et $dydz$. Les composantes de la pression élémentaire suivant les z, les y et les x sont donc

$$\pi z dxdy, \quad \pi z dxdz, \quad \pi z dydz.$$

Ces trois valeurs étant intégrées dans les limites que prescrit l'étendue de la surface qu'on considère, donneront les résultantes des pressions parallèles aux axes, éprouvées par cette partie de la surface plongée. Quant aux trois points où ces résultantes pressent la surface, il faut, pour les obtenir, recourir au théorème des momens ou aux équations (P), voyez pag. 42, n^{os}. 35 et 36. Ainsi désignons par Z et Y les coordonnées du centre de pression des forces parallèles aux x, et par R leur résultante, nous obtiendrons

$$R = \iint \pi z dydz, \quad RZ = \iint \pi z^2 dydz, \quad RY = \iint \pi zydydz.$$

De même dans le sens des y et des z on a

$$R' = \iint \pi z dxdz, \quad R'Z' = \iint \pi z^2 dxdz, \quad R'X' = \iint \pi zxdxdz.$$

$$R'' = \iint \pi z dxdy, \quad R''Y'' = \iint \pi zydxdy, \quad R''X'' = \iint \pi zxdxdy.$$

On ne pourra d'ailleurs réduire ces trois pressions à une seule que dans des cas particuliers (47). Quant aux intégrations, elles se pratiquent en suivant les mêmes principes que lorsqu'il s'agit d'évaluer l'aire ou le volume d'une portion de surface courbe; car on doit connoître l'équation de la surface pressée et les projections de ses limites.

Si la paroi pressée est un plan vertical, on peut le prendre pour celui des xz, dont l'équation est $y = 0$. On a donc R et R'' nuls, ce qui est d'ailleurs visible : et l'intégrale de $\pi zdxdz$, prise dans les limites convenables, donnera la pression cherchée : or $dxdz$ est l'élément pressé, $zdxdz$ est son moment relativement au plan des xy, ainsi $\int\int zdxdz$ est le z du centre de gravité de l'aire pressée, ce qui reproduit le théorême 279. Il est d'ailleurs aisé de voir que la valeur de Z' revient à celle de la formule (η).

III. *De l'Aréomètre et de la Balance hydrostatique.*

293. Comme la théorie des corps flottans exige la connoissance des pesanteurs spécifiques des divers corps, tant solides que fluides, nous allons nous occuper des moyens propres à les calculer. La *pesanteur spécifique* est le poids absolu de l'unité de volume (276); mais comme nous n'avons d'autre moyen d'assigner le poids d'un corps que de trouver son rapport à un poids pris pour unité (221), il est aisé de conclure qu'il ne s'agit ici que d'assigner les rapports qui existent entre les pesanteurs spécifiques des diverses substances. Il faut donc concevoir qu'on a pris pour unité la pesanteur spécifique d'une substance telle que l'eau, et qu'on veut seulement trouver les rapports qui existent entre cette pesanteur spécifique et celles des autres substances. Si le corps est liquide, on prendra un flacon dont on cherchera le poids, vide, plein d'eau, et enfin rempli du fluide dont on veut obtenir la pesanteur spécifique : soient a, b et c ces poids

respectifs; $b-a$ est celui de l'eau et $c-a$ celui du liquide contenus dans le flacon : comme les volumes sont égaux, le rapport des pesanteurs spécifiques est égal à celui de ces poids, ou $=\frac{c-a}{b-a}$.

S'il s'agit d'un corps solide, après avoir mis le flacon plein d'eau dans un des plateaux de la balance, et produit l'équilibre, on placera le corps à côté du flacon, et on ajoutera de l'autre part le poids nécessaire pour rétablir l'équilibre; ce poids sera celui du corps. Introduisant ensuite le corps dans le flacon toujours plein d'eau, et replaçant dans le même plateau qu'auparavant, on sera obligé d'ajouter un nouveau poids au flacon pour faire équilibre; ce sera le poids de l'eau qui a été chassée du flacon lorsqu'on y a mis le corps : il ne reste plus qu'à diviser ces deux poids l'un par l'autre, car le rapport cherché est le quotient du poids du corps divisé par le poids d'un volume d'eau égal à celui de ce même corps.

Cette méthode est due à Klaproth. Il est inutile de dire qu'il faut environner ces expériences de toutes sortes de précautions, pour pouvoir compter sur l'exactitude des résultats. Ainsi on emploiera une balance très-exacte, et le procédé indiqué pag. 134. On se servira d'eau distillée; on opérera à une température déterminée, puisque la chaleur fait varier le volume des corps...... Voyez la *Physique* de Fischer, pag. 117. On prend ordinairement 18° du thermomètre centigrade, parce qu'il est plus facile de se procurer cette température. Au reste, il est aisé de ramener les expériences à une température déterminée; car chaque degré donne à-peu-près la même augmentation de volume. Il résulte même des expériences de Gay-Lussac, que les gaz bien desséchés offrent rigoureusement cette conséquence. Pour 100 degrés de température, l'eau se dilate de 0,037; le cuivre de 0,0017; le fer de 0,001258; le mercure de 0,00165; l'akool 0,087; le verre blanc 0,00083. Il est facile d'en conclure l'augmentation qu'éprouve une surface ou un solide : si par exemple, un parallélipipède, dont les arêtes sont a, b et c, éprouve, pour chacune, une dilatation dont le rapport est $\frac{1}{s}$ pour chaque degré; la surface devient $ab + \frac{2ab}{s}$ et le solide $abc + \frac{3abc}{s}$, en négligeant le carré et le cube de $\frac{1}{s}$.

C'est d'après ces procédés et à la température de 18° centigrades, ou d'après les principes qu'on va développer, qu'on peut concevoir la formation de la table de pesanteurs spécifiques que nous donnons à la fin de cet ouvrage, et dans laquelle la pesanteur spécifique de l'eau distillée a été prise pour terme de comparaison et représentée par 1. De sorte que les nombres 7,2914 et 1 qu'on lit dans cette table à la suite des mots *Etain* et *Eau*, désignent que les poids de l'unité de volume, ou, si on veut, les poids de deux volumes égaux d'étain et d'eau, sont entre eux comme 7,2914 est à 1. On voit de même que ces poids pour le fer et le cuivre sont entre eux comme 7,8 est à 8,876, ou comme 7800 à 8876.

On peut se servir de cette table pour déterminer le poids x d'une substance dont le volume est connu; il faut pour cela chercher le poids a d'un pareil volume d'eau, et faire cette proportion (dans laquelle D désigne le nombre mis dans la table à côté de la substance dont il s'agit) $\frac{1}{D} = \frac{a}{x}$; donc $x = aD$. Ainsi *pour trouver le poids d'un volume déterminé d'une substance, il faut multiplier* *le nombre mis dans la table à côté de cette substance par le poids d'un volume égal d'eau.* Pour trouver ce dernier poids, on doit savoir que le centimètre cube d'eau distillée pèse 1 gramme, et que le décimètre cube pèse 1 kilogramme. Ainsi en multipliant 7,2914, qui est la densité D de l'étain, par 1 kilogramme, on a $7^{kil},2914$ pour le poids d'un décimètre cube d'étain : de sorte que notre table n'est en effet que le poids d'un décimètre cube de chaque substance. Il peut être utile de savoir que, d'après les anciennes mesures, le pied cube d'eau distillée pèse 70 livres, et le pouce cube 5 gros 13 $\frac{1}{2}$ grains.

294. L'*Aréomètre* (*) ou *Pèse-liqueur* est un instrument destiné à faire connoître les rapports des pesanteurs spécifiques des fluides : sa forme est à-peu-près arbitraire. Fig. 131. Soit D un globe de verre lesté inférieurement en F, afin qu'il garde la position verticale (301), et surmonté d'un tube CI. Si on plonge cet instrument dans un fluide, il s'y enfoncera jusqu'en un point C, et le poids entier de l'aréomètre sera égal au poids du volume v du fluide qu'il déplace. Dans un autre fluide, l'instrument s'enfonceroit jusqu'en E, et déplaceroit un volume v' : désignons par π et π' les pesanteurs spécifiques des fluides, le poids de l'instrument sera donc égal d'une part à πv, et de l'autre à $\pi' v'$; ainsi on aura $\pi v = \pi' v'$; c'est-à-dire que *les pesanteurs spécifiques de deux fluides sont en raison inverse des volumes déplacés.* Si donc on pouvoit parvenir à connoître ces volumes, on auroit le rapport des pesanteurs spécifiques.

Dans les usages ordinaires de la vie, comme on n'a besoin que de valeurs grossièrement approchées, et d'ailleurs

---

(*) Ἀραιός, petit, mince ; Μέτρον, mesure.

comme on n'éprouve qu'un petit nombre de fluides, on marque des divisions sur le tube *CI*; de sorte qu'au premier aspect on juge des pesanteurs spécifiques d'après les nombres de degrés de l'instrument. Mais ce procédé n'est propre qu'à indiquer si un fluide est plus ou moins dense qu'un autre, et il ne peut servir à mesurer le rapport de leurs densités.

Il faudroit donc avoir un moyen rigoureux d'évaluer les volumes de fluide déplacé dans les deux expériences; Fahrenheit en a évité la recherche en plaçant une cupule *B* à la partie supérieure du tube, puis y ajoutant ou en ôtant des poids, jusqu'à ce que la surface de l'eau montât au même point, ce qu'on appelle *affleurer*; car comme par là les volumes déplacés sont toujours les mêmes, p et $p \pm q$ désignant les poids de l'instrument, et v le volume déplacé dans les deux épreuves faites sur des fluides dont π et π' sont les pesanteurs spécifiques, on a $p = \pi v$ et $p \pm q = \pi' v$, d'où

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{p \pm q}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*).$$

295. *Nicholson* a imaginé d'employer à la détermination des pesanteurs spécifiques des solides un instrument analogue à l'aréomètre de *Fahrenheit*, et qui mérite d'être connu. Il consiste en un tube *MN* de fer blanc, surmonté d'une tige *Bb*, faite d'un fil de laiton, et qui porte à son extrémité une petite cuvette *A*. Cette tige est marquée vers son milieu d'un trait *b* fait avec la lime. La partie inférieure tient suspendu un cône renversé *E*, concave à l'endroit de sa base, et lesté en dedans avec du plomb. Le poids de l'instrument doit être tel, que quand on plonge celui-ci dans l'eau pour l'abandonner ensuite à lui-même, une partie du tube surnage. La cuvette *A* qui Fig. 132.

termine la tige, et qui a la forme d'une calotte sphérique, y est assujettie au moyen d'un petit tube de fer blanc, dans lequel cette tige entre avec frottement. On a ordinairement une seconde cuvette plus large, que l'on place au-dessus de la première, dans la concavité de laquelle elle s'engage par sa convexité. On peut ainsi enlever à volonté cette seconde cuvette, soit pour retirer plus facilement les poids dont elle est chargée, comme nous le dirons dans un instant, soit pour faire quelque changement dans leur assortissement.

L'usage de cet instrument est facile à concevoir. On commence par placer dans la cuvette supérieure le poids k nécessaire pour que le trait b, marqué sur la tige, descende à fleur d'eau; puis ôtant ce poids, on y substitue le corps destiné pour l'expérience, et on y ajoute le poids l nécessaire pour produire l'affleurement. Soit p le poids du corps dans l'air; comme le volume de fluide déplacé est le même dans les deux cas, on a $p = k - l$. On retire l'aréomètre pour placer le corps dans le bassin inférieur E; puis ayant replongé l'instrument, on produit de nouveau l'affleurement à l'aide d'un poids m, c'est-à-dire qu'on ajoute au poids l de la seconde expérience le poids $m - l$, qui est par conséquent la perte que le corps a faite de son poids dans l'eau, ou le poids du volume de fluide déplacé. Il ne s'agit plus que de diviser le poids p du corps par celui $m - l$ du fluide déplacé; de sorte que le rapport des pesanteurs spécifiques est $= \frac{k - l}{m - l}$; k, l, m étant les trois charges de l'aréomètre. On a dû remarquer que cet instrument donne le poids du corps dans l'air et dans l'eau.

S'il s'agit de deux fluides, soient a le poids entier de l'instrument, l la charge qui produit l'affleurement dans le premier fluide, λ le poids qu'il faut ajouter ou ôter pour le produire dans le second : $a+l$ et $a+l\pm\lambda$ sont les poids de fluide déplacé ; donc le rapport de leurs pesanteurs spécifiques est $\frac{a+l\pm\lambda}{a+l}=1\pm\frac{\lambda}{a+l}$. (*Physique* de Haüy, n°. 54.)

296. Soient trois substances M, N et P, telles qu'un sel, de l'alkool et de l'eau, il est facile de trouver le rapport des pesanteurs spécifiques du sel et de l'eau, lorsqu'on connoît celles qui existent entre l'eau et l'alkool d'une part, et le sel et l'alkool de l'autre. Car soient π, π', π'' les pesanteurs spécifiques de M, N et P; a, b, c leurs rapports, de sorte que $\pi=a\pi'$, $\pi=b\pi''$, $\pi'=c\pi''$; en éliminant π entre les deux premières, on a $a\pi'=b\pi''$, d'où $b=ac$: on devra employer ce procédé toutes les fois qu'on voudra trouver la pesanteur spécifique d'un corps soluble dans l'eau.

297. Concevons une balance très-exacte, qui porte en dessous de l'un de ses plateaux un crin auquel on puisse suspendre les corps, afin de les peser dans l'air et dans l'eau : cet instrument a été nommé *Balance hydrostatique*. Après avoir mis ainsi un corps en équilibre dans l'air, on fait en sorte qu'il plonge dans l'eau ; comme il y perd une partie de son poids, on est obligé d'ajouter un poids f pour rétablir l'équilibre ; ce poids f est celui de l'eau qu'il a déplacée. Soit P le poids du corps dans l'air, $\frac{P}{f}$ sera le rapport du poids du corps à celui de l'eau déplacée, et par conséquent sera le rapport des pesanteurs spécifiques du corps et du fluide.

Puisque f est le poids d'un volume V d'eau égal à celui du corps, on a $\frac{f}{V}=\frac{1^{\text{kil.}}}{1^{\text{déc. cube}}}$ (*Voyez* n°. 293), ainsi

$V=\frac{f\times 1^{\text{déc. c.}}}{1^{\text{kil.}}}$; le poids f, exprimé en kilogrammes, donnera donc le volume du corps exprimé en décimètres cubes ; ce qui offre le moyen d'avoir le volume d'un corps quelconque.

La balance hydrostatique sert aussi à trouver les rapports des pesanteurs spécifiques des fluides ; car soient f et f' les poids qu'il faut, comme ci-dessus, ajouter à un corps pour qu'il soit en équilibre dans deux fluides ; ce sont les poids de deux volumes égaux des fluides, $\frac{f}{f'}$ est donc le rapport cherché. Ainsi le rapport des pesanteurs spécifiques des fluides est le même que celui des pertes de poids que fait le corps plongé. Consultez sur cette matière la *Table des pesanteurs spécifiques*, par Brisson.

298. Il est aisé maintenant de comprendre comment ARCHIMÈDE put résoudre le problème de Hiéron, roi de Syracuse. Il s'agissoit de s'assurer, sans endommager une couronne, si elle étoit composée d'or pur ; et dans le cas où on y auroit mêlé de l'argent, de connoître le rapport entre les parties constituantes de ces deux métaux. Ce problème revient à trouver le titre d'un lingot composé d'or et d'argent.

Soient π et π' les rapports connus des pesanteurs spécifiques de ces deux métaux à celle de l'eau ; f et f' les poids du mélange dans le vide et dans l'eau ; enfin x et $f-x$ les poids respectifs des parties d'or et d'argent contenues dans le mélange. Puisque π est le quotient du poids x de l'or divisé par le poids de l'eau qu'il déplace, ce dernier poids est $=\frac{x}{\pi}$: de même $\frac{f-x}{\pi'}$ est celui que l'argent déplace. La somme de ces quantités est le poids f' du volume d'eau déplacé par le mélange ; ainsi

$$f' = \frac{x}{\Pi} + \frac{f - x}{\Pi'}, \text{ d'où } x = \frac{\Pi(f - f'\Pi')}{\Pi - \Pi'}.$$

S'il n'y avoit eu que de l'or, on auroit eu $\Pi = \frac{f}{f'}$ d'où $x = f$; il est donc aisé de s'assurer si le mélange contient de l'alliage, ou s'il n'est formé que d'or pur. Cette théorie est supposée dégagée de la pénétration apparente que les corps mélangés peuvent éprouver en vertu de leurs attractions chimiques.

IV. *Stabilité et oscillations des corps flottans.*

299. Lorsqu'un corps flottant est en équilibre, s'il est dérangé de cet état par une cause quelconque, telle qu'une impulsion, il est important de connoître si cette circonstance permettra au corps de revenir à sa première position, ou le contraindra au contraire à s'en écarter davantage : c'est ce que nous nous proposons d'examiner ici.

Dans la situation d'équilibre, la droite GO qui joint Fig. 133
le centre de gravité G du corps DFE à celui O du et 134.
fluide déplacé AFB, est verticale; ce sera notre axe des z: lorsqu'on dérange le corps, la ligne GO s'incline, O n'est plus le centre de gravité du fluide déplacé aFb; nous supposerons ici que le dérangement a été très-petit, ou que le corps a tourné infiniment peu; nous prendrons le plan xy horisontal et passant en G; le plan de la figure lui est perpendiculaire; l'axe des y y est projetté en G, Gx est l'axe des x, AB représente la surface de flottaison dans l'état d'équilibre, ab est celle de l'état varié; on est supposé avoir pris les y parallèles à l'axe de ces surfaces, qui sépare la partie BCb qui s'est immergée, de celle ACa qui est sortie du fluide; c'est ce qu'on nomme l'axe

de flottaison ; il est projeté en C ; O peut être placé plus bas que G ; cela ne change rien aux considérations : notre figure suppose que le corps flottant n'est point homogène, et que sa partie inférieure est chargée d'une substance spécifiquement plus pesante que le fluide. Du reste nous regarderons comme infiniment petit l'angle $aCA = \theta = GOV$: de sorte qu'on peut supposer l'onglet ACa engendré par la révolution de la surface AC autour de l'axe de flottaison C ; il en est de même de BCb ; qq' et pp' sont les projections des arcs décrits par les centres de gravité de BC et AC.

Nous ferons ici abstraction du mouvement vertical du corps, et nous regarderons aFb comme égale à AFB, de sorte que la partie ACa qui est sortie du fluide soit égale à celle BCb qui s'y est plongée. S'il n'en étoit pas ainsi, le poids du corps ne seroit plus égal à la poussée du fluide, et ces deux forces pouvant être considérées comme appliquées en G (255), le corps auroit un mouvement vertical : mais en outre il tourneroit autour du point G comme s'il étoit fixe ; et comme ce dernier mouvement a lieu indépendamment du premier, et qu'il est le seul qui nous intéresse, notre hypothèse simplifie les considérations et ne change rien à ce mouvement. En égalant les expressions des volumes égaux ACa, BCb qui sont (p. 93) $AC \times pp'$ et $CB \times qq'$, on voit que comme les momens des aires AC et BC sont égaux par rapport à l'axe C de flottaison, le centre de gravité de la surface AB ou ab est situé sur cet axe.

L'équilibre n'ayant plus lieu, nous allons chercher le mouvement que le corps devra prendre. Soient $GO = a$, le volume $AFB = aFb = S$; on a de plus $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$.

La poussée du fluide sur la partie plongée aFb est égale au poids du fluide déplacé ; cette force agit au centre des deux onglets. Supposons que les ordonnées dans le sens des y de leurs centres de gravité respectifs sont positives : l'élément ϵ pris sur CB donne le parallélipipède élémentaire $\theta\rho\epsilon$; en désignant par r sa distance au plan xz, $\theta\rho\epsilon r$ est son moment; la somme des momens est donc $\theta\int(\rho\epsilon r)$; bien entendu que ces divers momens doivent varier de signes avec r, c'est-à-dire suivant que les élémens sont d'une part ou de l'autre du plan xz : on a donc $\theta\int(\rho\epsilon r)$ pour le moment de BCb. On obtiendra pour aCA une expression semblable, mais elle doit être prise en signe contraire, parce que la poussée qui est relative à Bcb et aFb agit visiblement en sens contraire du poids de ACa : cette expression négative, passée dans le second membre, devient positive, et on a $Sy=\theta\int(\epsilon\rho r)$; d'où on tire $y=\frac{\theta}{S}\int(\epsilon\rho r)$.

Le signe $\int$ désigne une intégration relative à toute l'étendue de la surface de flottaison, et à une droite qui est l'intersection de cette surface par le plan xz : on doit la regarder comme connue; mais elle n'est pas essentiellement positive, comme $\int(\epsilon\rho^2)$; ses parties doivent y être prises avec leur signe, suivant qu'elles tombent d'un côté ou de l'autre de l'axe dont il s'agit. Ainsi l'y du métacentre est positive, négative ou nulle avec $\int(\epsilon\rho r)$.

300. Si le corps est coupé par le plan xz en deux parties symétriques, $S(\epsilon\rho r)$ est nul, $y=0$ et l'x du centre de gravité est donnée par la formule (λ).

Si par exemple il s'agit d'un cylindre horisontal dont la base soit DFE, on trouve, pour le moment d'inertie du rectangle qui est la surface de flottaison, ...
$\int(\rho^2\epsilon)=\int(y^2dxdy)=\frac{1}{12}kh^3$, k étant la longueur de l'arête ou la base, et h la hauteur AB de ce rectangle. Si donc on désigne par B l'aire de la partie AFB plongée

de la base, on a $S=bk$, $b^2=\frac{1}{12}kh^3$, d'où

$$y=0,\quad x=\left(\frac{h^3}{12B}\pm a\right)\theta=A\theta\ldots\ldots(\mu),$$

A désignant $\frac{h^3}{12B}\pm a$.

Fig. 134. Lorsque $x=0$, les centres de gravité du corps et du fluide déplacé se trouvent encore dans la même verticale Gz; ainsi l'équilibre subsiste dans la nouvelle position du corps. Cela arrive lorsque a étant négatif, on a $a=\frac{b^2}{S}$; mais si ces conditions n'ont pas lieu, comme la poussée du fluide agit de bas en haut, il est clair que lorsque x est positif, le corps tend à reprendre sa première position : on dit alors que l'équilibre est *stable*. Ce cas a lieu lorsque a est positif, ou lorsque a étant négatif, il arrive que a est plus petit que $\frac{b^2}{S}$. Enfin si a est négatif et $>\frac{b^2}{S}$, x est négatif, ce qui signifie que le centre de gravité de aFb est disposé de l'autre côté de la verticale Gz : il est alors évident que la poussée du fluide tend à écarter davantage le corps de sa position primitive, et que l'équilibre n'est point stable.

La poussée du fluide rencontre l'axe des z primitif en un point auquel *Bouguer* a donné le nom de *Métacentre* (*) dans son *Traité du navire*. Il suit de cette définition que *le corps flottant est en équilibre stable lorsque le métacentre est plus élevé que le centre de gravité du corps; qu'il manque au contraire de stabilité lorsque le méta-*

(*) Μετὰ, au-delà; Κέντρον, centre.

centre est plus bas que le centre de gravité du corps; et qu'enfin lorsque ces deux points coïncident, le corps persiste dans l'état où on le met. Il est en effet évident que le point g est plus élevé ou moins élevé que G, ou même coïncide avec G, suivant que la valeur de Gn est positive, négative ou nulle.

301. Représentons, pour abréger, par A le coefficient de θ dans la formule (μ), ou dans celle (λ), en y regardant toutefois le corps comme coupé symétriquement par le plan xz; ainsi $A = \frac{b^2}{S} \pm a$; donc $Gn = A\theta$ et $Gg = A$: enfin, P désignant le poids du corps ou la poussée du fluide, $PA\theta$ sera le moment de cette force par rapport à l'axe passant par le centre de gravité G. Nous avons vu (k'', 244) que lorsqu'un corps, retenu par un axe fixe, est soumis à l'action d'une force, l'effet de cette force pour faire tourner le corps croît proportionnellement à l'intensité de la puissance et à sa distance de l'axe fixe. La puissance est ici la poussée du fluide; son moment par rapport au centre de gravité est $PA\theta$: il suit de là que lorsqu'un corps flotte sur un fluide, son poids P étant constant, la vitesse qu'engendre la poussée du fluide est d'autant plus grande que l'inclinaison θ est elle-même plus grande, ainsi que A. Donc la *stabilité* d'un corps flottant en équilibre est d'autant plus grande que son centre de gravité est plus bas que celui du fluide déplacé, et que la distance entre ces centres est aussi plus grande. Alors si le corps est tiré de l'état de l'équilibre, la force qui tend à le rétablir est elle-même d'autant plus grande. C'est par cette raison qu'on *leste* les corps flottans dont on veut empêcher le renversement : on dispose à leur partie inférieure une substance d'une pesanteur spécifique plus grande que celle du fluide, Fig. 184.

afin que le centre de gravité du corps soit plus bas que celui du fluide déplacé.

502. On aura une juste idée de l'équilibre stable et de l'équilibre non stable, en considérant une ellipse placée verticalement sur un plan horisontal. Si l'ellipse est en équilibre sur son petit axe, on voit qu'en l'écartant un peu de cette situation, elle tend à y revenir, en faisant des oscillations que le frottement et la résistance de l'air auront bientôt anéanties. Mais si l'ellipse est en équilibre sur son grand axe, une fois écartée de cette situation, elle tend à s'en éloigner davantage, et finit par se renverser sur son petit axe.

L'exemple que nous venons de donner offre une circonstance remarquable, mais qui pourtant ne lui est pas particulière; les quatre positions d'équilibre de l'ellipse sur les extrémités de ses deux axes, sont alternativement stables et non stables : il est aisé de se convaincre que la même chose a lieu dans tous les cas. En effet, soient deux positions d'équilibre stable d'un corps, et telles qu'il n'en existe entre elles aucune de même nature : si le corps, supposé placé dans une de ces positions, en est écarté pour l'approcher de l'autre; suivant que cet écartement sera plus ou moins grand, le corps tendra à revenir à son premier état, ou à atteindre la seconde position. Il suit de là qu'il faut nécessairement qu'entre ces deux positions il y en ait une où le corps ne tende pas plus vers l'une que vers l'autre : cet état intermédiaire est un équilibre non stable; car quelque peu qu'on en écarte le corps vers l'une des deux positions stables, il devra y parvenir.

Donc *si un corps, en tournant autour d'un axe fixe, passe successivement par plusieurs positions d'équilibre, elles seront tour-à-tour stables et non stables.* On voit donc que le nombre total de ces positions est pair, à moins que deux positions consécutives ne se confondent; dans ce cas la position résultant de leur réunion, donnera l'état déja examiné dans lequel la valeur (λ) est nulle.

303. Lorsqu'on écarte très-peu un corps d'une position d'équilibre stable, puisque le moment $PA\theta$ de la poussée du fluide est proportionnelle à l'arc θ que le corps devra décrire pour se rétablir dans l'état primitif, cette restitution devra s'opérer suivant les mêmes lois que pour le pendule. Le corps fera donc des oscillations autour de la position d'équilibre stable, et même il oscilleroit sans cesse autour du centre de gravité, si la résistance du fluide n'éteignoit peu-à-peu sa vîtesse, et ne le rendoit enfin au repos stable dont on l'a tiré. Le calcul fournit des moyens de s'assurer directement de tout ceci, et en outre sert à déterminer toutes les circonstances du mouvement oscillatoire, ainsi que nous allons l'exposer, en nous bornant toujours au cas où le corps est symétrique par rapport au plan xz.

Supposons que le corps ait été très-peu écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné ensuite à l'instant où on compte $t=0$. Au bout du tems t, la droite GO qui passe par les centres de gravité du corps et du fluide déplacé dans l'état d'équilibre, fera avec la verticale un angle GOV mesuré par l'arc θ. Soit f la valeur de θ lorsque $t=0$, c'est-à-dire la valeur angulaire qui détermine la position du corps à cet instant : enfin soit α l'arc décrit par le point placé sur GO à l'unité de distance du point G, et v la vîtesse de ce point, ou la vîtesse angulaire; on a $\theta=f-\alpha$: ces dénominations sont les mêmes qu'aux n^{os}. 248 et 197 pour le pendule. Au bout du tems t, la poussée du fluide tend à accroître la vîtesse v; et en appliquant ici la formule (m'', 247), on voit que Fig. 134. Fig. 131.

pour obtenir la force accélératrice angulaire $\frac{d\omega}{dt}$, il faut diviser le moment $PA\theta$ de la poussée du fluide, par rapport au centre de gravité G, par le moment d'inertie : or M étant la masse du corps, on a $P=gM$; et le moment d'inertie est Mk^2; ainsi $\frac{d\omega}{dt}=\frac{Ag\theta}{k^2}=\frac{Ag}{k^2}(f-\alpha)$: or $\omega=\frac{d\alpha}{dt}$; multipliant ces deux équations, et intégrant, on a

$$\omega=\frac{\sqrt{(Ag)}}{k}.\sqrt{(2f\alpha-\alpha^2)},\ \text{d'où } dt=\frac{k}{\sqrt{(Ag)}}.\frac{d\alpha}{\sqrt{(2f\alpha-\alpha^2)}};$$

on intègre de nouveau (voyez pag. 215), et on trouve

$$t=\frac{k}{\sqrt{(Ag)}}.\text{arc}\left(\cos=\frac{f-\alpha}{f}\right),\ \text{d'où } \alpha=f\left\{1-\cos\left(\frac{t}{k}\sqrt{(Ag)}\right)\right\}$$

Les constantes sont nulles, parce que $t=0$ donne $\omega=0$ et $\alpha=0$. On conclut de là que

1°. Si A est positif, pour que la valeur de ω soit réelle,
Fig. 101. il faut que α soit $<2f$, qui est l'excursion QOQ' que l'axe MO du corps fait de part et d'autre de la verticale OA; il y a donc stabilité : si au contraire A est négatif, il n'y a pas stabilité ; de sorte que la réciproque est vraie.

2°. En comparant la valeur de ω à celle (n'', p. 358), on voit que le corps doit osciller lorsque A est positif, et que ses oscillations sont isochrones : $\alpha=2f$ donne pour le tems T de l'oscillation entière, $T=\frac{k\pi}{\sqrt{(Ag)}}$.

3°. En comparant cette valeur avec celle (s', p. 271), on obtient pour la longueur r du pendule simple *synchrone* (249), $r=\frac{k^2}{A}$.

304. Appliquons ces principes au cas où le corps est un prisme dont le profil transversal est DCE, tel que sa partie plongée soit un triangle ABC isocèle, et dans lequel $AB = b = 2m = 2AF$, et $CF = h$: le surplus $ADEB$ du profil peut avoir une forme quelconque. Soit G le centre de gravité du corps; O celui de ACB; $FO = \frac{1}{3}h$, (58); Soit $FG = n$: on aura donc...... $OG = a = n - \frac{1}{3}h$; de plus l'aire ACB est $B = mh$. Ainsi la distance A du métacentre au point G est $A = \frac{2m^2 \pm h(3n - h)}{3h}$, et il est aisé d'en conclure les conditions nécessaires pour que le corps soit dans un équilibre stable, non stable ou permanent. On obtient pour la longueur du pendule synchrone $r = \frac{3hk^2}{2m^2 \pm h(3n - h)}$: on auroit aussi aisément le tems de l'oscillation. Fig. 132.

Si la partie plongée du corps étoit un rectangle $ABIH$, en faisant de même $AB = b = 2m$, $BI = h$, et $GF = n$; on trouve $S = 2mh$, $OF = \frac{1}{2}h$, $GO = a = n - \frac{1}{2}h$: donc $A = \frac{m^2}{3h} \pm (n - \frac{1}{2}h)$; et les conditions de la stabilité s'en déduisent aisément : on obtient aussi la longueur du pendule synchrone et le tems de l'oscillation. Voyez *Méc. phil.*, pag. 270.

CHAPITRE III.

DES FLUIDES PESANS DE DENSITÉ VARIABLE.

I. *Des Fluides hétérogènes pesans et incompressibles.*

305. Si dans un même vase on mêle ensemble des fluides de pesanteurs spécifiques différentes, les molécules devront se séparer, et celles d'une même espèce se réuniront entre elles : les positions respectives des fluides devront être telles, que les couches qui les séparent soient horisontales, pour que leurs surfaces soient de niveau (272, 2°.), et que les fluides spécifiquement moins pesans soient disposés dans la partie supérieure du vase, pour que l'équilibre soit stable.

Fig. 136. Soit $ABCD$ un syphon de forme arbitraire renfermant deux fluides en équilibre, contenus l'un en $EBCG$, l'autre en $OGHN$; ces substances sont en contact en OG. Soient π et π' leurs pesanteurs spécifiques respectives, h et h' les hauteurs des fluides au-dessus de OG, c'est-à-dire $EF = h$, $KI = h'$. Cela posé, il est visible que la partie $FBCG$ est naturellement en équilibre; il faut donc, pour que l'équilibre existe, que les pressions exercées sur OG, par les fluides EF et HG, soient égales. La première (277) est $\pi h \times$ *surface* OG; la seconde est $\pi' h' \times$ *surface* OG : donc $\pi h = \pi' h'$, c'est-à-dire que *deux fluides en équilibre dans un syphon, doivent avoir leurs hauteurs au-dessus de la surface de contact, en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques.*

306. On pourra toujours (277) substituer à un fluide renfermé dans un vase, un autre fluide, d'une densité constante et donnée, sans que la pression sur le fond du vase soit différente : il ne faudra que donner une hauteur convenable à ce fluide. Si donc un vase contient plusieurs fluides en équilibre, et de densités différentes, on pourra leur substituer un fluide homogène qui produiroit la même pression sur le fond de ce vase. On conclut aisément de là que *si un même vase renferme différens fluides, la pression exercée sur le fond horizontal, est le produit de la surface de ce fond, par la somme des produits des pesanteurs spécifiques des fluides par leurs hauteurs.*

II. *Des fluides élastiques.*

307. Les fluides classés sous la dénomination d'*aériformes*, jouissent de la propriété remarquable d'occuper sensiblement un espace d'autant plus petit, que les puissances qui les compriment sont plus grandes, et de se rétablir dans leurs volumes primitifs, lorsque les forces qui qui ont fait changer ces volumes cessent leur action. Cette propriété leur a fait donner le nom de *Fluides élastiques*; soit P une pression exercée sur un volume V de fluide, dont la densité soit D; p une autre pression, v le volume que prendra la masse du fluide en vertu de cette pression, et d sa densité : la propriété de l'élasticité parfaite donne les équations

$$PV = \mathrm{p}v, \quad VD = vd, \quad \text{et} \quad Pd = \mathrm{p}D \ldots\ldots (v).$$

Ces valeurs ne donnent que la pression exercée sur l'unité de surface; mais en faisant abstraction de la pesanteur, ou de toute autre force qui pourroit faire varier la densité lorsqu'on passe d'un point de la masse du fluide à un autre point, tout ce qui a été dit (269) s'applique ici; ainsi la pression p exercée sur la surface a sera

$$\text{p} = \frac{ad}{D} P, \text{ ou } \text{p} = \frac{aV}{v} P.$$

308. Reprenons l'équation (δ, p. 398) $dp = -gDdz$; lorsque le fluide est compressible, il est évident que les couches les plus basses étant chargées du poids de toutes celles qui sont au-dessus, deux tranches horisontales de ce fluide, prises à différentes hauteurs, ne peuvent avoir même densité; D variera donc avec x, y et z, et la loi de cette variation dépendra de la nature du fluide. Si on suppose la température constante, l'intégration sera facile à faire, puisque D ne sera fonction que de p. C'est ce qui arrive pour l'air atmosphérique, car lorsque la chaleur est uniforme, la densité D est sensiblement proportionnelle a la pression, parce qu'il se comprime en raison inverse des poids dont il est chargé. Mais lorsque la température varie, la chose n'a plus lieu ainsi, parce que l'élasticité de l'air augmente par la chaleur, de sorte qu'avec une densité moindre, il peut soutenir la même pression. On a trouvé qu'à fort peu près la dilatation de l'air est proportionnelle à l'accroissement de température, la pression demeurant la même; de sorte que le volume s'accroît de son 250e. pour chaque degré du thermomètre centigrade.

III. *Du Baromètre.*

309. Appliquons cette théorie au BAROMÈTRE (*). Cet

(*) Βάρος, poids, charge; Μέτρον, mesure.

instrument consiste en un tube recourbé *giac*, fermé Fig. 87.
en *g* et ouvert en *c*; la partie *gd* est entièrement vide d'air, et la partie *dia* est remplie d'un fluide pesant, tel que du mercure. Les points *d* et *a* n'étant pas au même niveau, il est évident (274) que si aucune puissance n'est appliquée en *a*, le mercure doit s'échapper par l'orifice *c*, jusqu'à ce que la surface *d* soit parvenue en *i* au niveau de *a*. Mais dans l'état physique des choses, l'extrémité *g* étant bouchée, la surface *d* n'est pressée par aucun poids supérieur. Or l'orifice *c* étant chargé du poids de la colonne d'air qui lui répond verticalement, et le fluide renfermé au-dessous de *ia* étant de lui-même en équilibre, il faut, pour détruire la pression exercée en *a* par le poids de l'air, une colonne de mercure *di* dont, à bases égales, le poids soit identiquement le même que celui de la colonne d'air. Cette hauteur varie avec le ressort de l'air, elle est ordinairement de 76 centimètres : elle dépend du rapport des pesanteurs spécifiques des deux fluides (305).

On peut donc se servir de cet instrument pour mesurer Fig. 140.
le ressort de l'air, par la hauteur à laquelle le mercure reste suspendu dans le tube. Pour cela on construit un cadran qui en indique les variations, comme on l'a décrit pag. 173, ou on fixe le tube sur une planche graduée vers *dg* et *ac*, afin de mesurer les changemens successifs du niveau *d* du mercure. On juge du ressort de l'air en comparant entre elles les surfaces *d* et *a* du mercure, et on a, par une simple soustraction, la différence de niveau, c'est-à-dire la hauteur de la colonne de mercure suspendue. Il faut observer que dans les deux cas, la branche où le mercure est élevé doit être plus longue que 76 centimètres, puisqu'alors ce fluide l'empliroit entièrement. Si on faisoit un baromètre avec de l'eau, il faudroit que le

tube eût plus de 32 pieds, ou 10,3 mètres; car on peut s'assurer (293) qu'une colonne d'eau de cette hauteur a le même poids qu'une colonne de mercure de $0{,}76^{m}$ de haut. Enfin on voit que le baromètre peut s'adapter à une *machine pneumatique*, afin de connoître jusqu'à quel point on a fait le vide, ou raréfié l'air sous le récipient.

La quantité h qui entre dans l'équation (ε, 276), et qui provient du poids de l'atmosphère, est donc le poids variable de la colonne de mercure suspendue par le ressort de l'air, colonne qui a environ 28 pouces de haut, ou 76 centimètres.

L'air renfermé exerce, par son ressort, la même pression que s'il agissoit librement par son poids; en conséquence la hauteur du mercure doit être la même dans un endroit fermé que dans l'air libre. Cependant l'état de la température de l'atmosphère doit faire varier un peu cette hauteur; car lorsque l'air devient plus chaud, le mercure se dilate et sa densité diminue: il faut donc alors un plus grand volume de mercure pour qu'il en résulte le même poids: ainsi le ressort de l'air étant supposé le même, la colonne de mercure doit avoir une plus grande hauteur pour lui faire équilibre. Mais la variation de densité du mercure n'étant guère sensible, on peut en faire abstraction dans les opérations qui n'exigent pas une grande exactitude.

310. L'un des usages les plus intéressans auxquels on ait destiné le baromètre, est l'application qu'on en a fait au nivellement: cette théorie est d'une trop haute importance pour que nous négligions de l'examiner. Il résulte de ce qu'on a vu, que la densité des couches atmosphériques décroit à mesure qu'on s'élève, et par conséquent la colonne de mercure doit en même tems s'abaisser. Voici comment on a fait servir la connoissance de ces

abaissemens à la détermination de la hauteur verticale z qui sépare deux lieux d'observation.

Pour intégrer l'équation $dp = -gDdz$, observons que la pression varie proportionnellement à la densité, à égale température, et que la dilatation varie proportionnellement à l'accroissement de température 308 à pression égale. Si donc on désigne la température par α, on a $p = f\alpha gD$, fg étant une constante indéterminée. Divisons nos deux équations l'une par l'autre, il vient $\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{f\alpha}$, d'où $\log p = -\int \frac{dz}{f\alpha}$. Nous désignons par p et p' les pressions correspondantes aux hauteurs Z et o, le mercure étant dans le baromètre élevé de h et h'; de sorte que les lettres accentuées se rapportent à la station inférieure : du reste on a $\frac{p'}{p} = \frac{h'}{h}$. Puisque les limites de l'intégration sont de p' à p, et de o à Z, on a $\log p' - \log p = \int \frac{dz}{f\alpha}$, d'où

$$fL\left(\frac{h'}{h}\right) = \int \frac{dz}{\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\xi).$$

Nous remplaçons ici les logarithmes népériens par ceux des tables ou de Briggs, que nous indiquons par le signe L, parce qu'il faudroit multiplier par le module, ce qui ne change que la constante indéterminée f. L'intégration qui reste à effectuer doit être depuis $z = o$ jusqu'à $z = Z$; mais il faudroit connoître pour cela la loi suivant laquelle la température varie à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère. Nous examinerons d'abord le cas le plus simple qui est celui où elle est constante. On a alors, en supprimant α qui se combine avec f,

$$Z=fL\left(\frac{h'}{h}\right).$$

Deluc ayant choisi parmi les résultats dus à l'observation ceux qui paroissoient mériter plus de confiance, et cherchant la valeur du facteur numérique f, trouva ce résultat d'une simplicité remarquable $f=10\,000$, la température étant d'environ $16^\circ\,\frac{3}{4}$ du thermomètre de Réaumur : mais pour toute autre température, il falloit faire subir une correction à la formule : comme il croyoit que l'air varie du 215^e. de son volume par chaque degré, il augmentoit le résultat ci-dessus d'autant de fois sa 215^e. partie qu'il y avoit de degrés de différence entre $16^\circ\,\frac{3}{4}$ et la température moyenne entre celle des deux lieux d'observation. Soit k cette différence, la formule de Deluc est donc

$$Z=10\,000\,L\left(\frac{h'}{h}\right)\left\{1\pm\frac{k}{215}\right\}\ldots\ldots\ (a).$$

Trembley, par des expériences plus nombreuses a trouvé qu'il falloit prendre pour k la différence entre $11^\circ,5$ et la température moyenne ; il remplaçoit de plus le nombre 215 par 192. Ces estimations sont rapportées à la toise pour unité, et il paroît que la dernière est plus exacte.

511. Ces procédés ont plutôt une exactitude empirique qu'une certitude raisonnée, et on sent que la détermination à laquelle ils conduisent ne peut être que très-vague ; car ils reposent sur diverses hypothèses absolument inadmissibles : 1°. l'air ne se comprime pas proportionnellement aux poids dans toutes les limites ; 2°. à des élévations un peu considérables la gravité décroît ; 3°. les gaz et autres corps étrangers dont l'air est sans cesse chargé, modifient la variation de sa densité ; 4°. comme on a reconnu que l'air se refroidissoit graduellement à

mesure qu'on s'élevoit, l'hypothèse de la température constante est démentie par l'expérience; 5°. enfin le baromètre étant lui-même soumis aux impressions de la chaleur, le fluide métallique qui compose cet instrument éprouve des changemens de dimension(309) auxquels on ne peut négliger d'avoir égard. Ces deux dernières circonstances sont même celles qui influent d'une manière plus décisive dans les expériences, et ce sont elles que les physiciens ont sur-tout eues pour objet lorsqu'ils ont voulu corriger la théorie précédente.

Comme l'usage du baromètre est beaucoup plus expéditif et plus commode que celui des instrumens de géométrie, il étoit très-important de se procurer une formule susceptible d'une plus grande précision.

Laplace a donné (pag. 289, tom. IV, *Méc. cél.*) une solution très-élégante du problème qui nous occupe; elle consiste à déterminer la loi qui lie z à α, à l'introduire dans l'équation (ξ), et à intégrer depuis $z = 0$ jusqu'à $z = Z$.

La constitution physique de l'atmosphère dépend d'élémens si compliqués et si variables, qu'il est très-douteux que l'analyse puisse les combiner d'une manière rigoureuse. Le froid des couches d'air supérieures les condense, et la pression qui en résulte doit être plus forte que dans l'hypothèse d'une température constante. La théorie des réfractions (*Méc. cél.*, pag. 257) prouve que la constitution réelle de l'atmosphère est comprise entre ces deux limites, savoir : une température constante et une température décroissante en progression arithmétique lorsque les hauteurs croissent dans une progression semblable. Cette dernière évaluation satisfait aux phénomènes avec une exactitude suffisante, attendu que l'élévation de nos montagnes est peu considérable relativement à celle de l'atmosphère entière, qui est de 60 000 mètres environ. On conçoit en effet que parmi les causes de variation de la température, il en est qui sont insensibles dans une aussi petite étendue, et d'autres qui doivent se reproduire d'une manière constante. Admettons donc que la température α décroisse en progression arithmétique à-peu-près; et cherchons à lier z et α par une relation qui remplisse cette condition, soit facile à calculer, et de plus soit telle qu'elle s'accorde avec les températures données q et r des lieux où l'on fait les observations, et dont l'un répond à $z=0$ et l'autre à $z=Z$. En supposant $\alpha=\sqrt{(q^2-iz)}$, ces conditions sont satisfaites, i désignant, pour abréger, $\frac{q^2-r^2}{Z}$: en effet $z=0$ donne $\alpha=q$, et $z=Z$ donne $\alpha=r$; de plus le développement de $(q^2-iz)^{\frac{1}{2}}$, procédant suivant les puissances de....... $\frac{iz}{q^2}=\frac{q^2-r^2}{q^2}\cdot\frac{z}{Z}$, sera très-convergent; de sorte que si on se bornoit aux deux premiers termes, on auroit $\alpha=q-\frac{1}{2}\frac{iz}{q}$; la condition que α et z varient à-peu-près en progression arithmétique est donc remplie.

On a donc $\int\frac{dz}{\alpha}=-\frac{2}{i}\sqrt{(q^2-iz)}+C$; l'intégrale est nulle pour $z=0$; ainsi $C=\frac{2q}{i}$ et $\int\frac{dz}{\alpha}=\frac{2}{i}(q-\alpha)$: l'autre limite de l'intégrale est $z=Z$ ou $\alpha=r$; on a donc, en remettant pour i sa valeur, $\frac{2Z}{q+r}$. Or les températures se mesurent par des degrés thermométriques, pris à partir du terme de congélation; soit l la température qui y correspond, et t',

t les nombres de degrés du thermomètre centigrade, on a $q = l + t'$, $r = l + t$; notre intégrale devient.....
$\frac{2Z}{2l + t + t'}$, et l'équation (ξ) donne

$$Z = fl\left\{1 + \frac{t + t'}{2l}\right\} L\left(\frac{h'}{h}\right),$$

bien entendu qu'on doit prendre négativement les valeurs de t et t' qui indiquent des températures au-dessous de zéro.

Ramond a obtenu la valeur du coefficient fl par des expériences précises et nombreuses; il est parvenu à $fl = 18\,336$; on sait d'ailleurs (308) que $l = 250$.

312. Il ne nous reste plus qu'à faire une correction relative à h : en effet les hauteurs du mercure dans le tube du baromètre n'étant plus proportionnelles aux densités, à cause de la dilatation du fluide métallique (309), il convient de changer h, afin de dégager l'expérience de cet effet, et de la ramener à ce qu'elle auroit été si en partant du lieu inférieur, le mercure avoit conservé la même densité à la région supérieure. Or on sait que pour chaque degré du thermomètre centigrade, le mercure se dilate de $\frac{1}{5412}$; ainsi la hauteur h observée à la région la plus élevée (et la plus froide) doit devenir $h + \frac{h(t'-t)}{5412}$ ou $h\left(1 + \frac{t'-t}{5412}\right)$: valeur qui doit remplacer h dans notre formule. Elle donne donc pour la différence de niveau des lieux d'observation

$$Z = 18336\left(1 + \frac{t'+t}{500}\right) . L\left\{\frac{h'}{h} \times \frac{1}{1 + \frac{t'-t}{5412}}\right\},$$

t et t' sont les nombres de degrés du thermomètre centigrade; h et h' les hauteurs du mercure dans le baromètre : les lettres accentuées sont relatives à la station la plus basse. On peut mettre cette équation sous la forme suivante

$$Z = 36{,}672\,(500 + t' + t)\,L\left\{\frac{5412\,h'}{h\,(5412 + t' - t)}\right\} \ldots\ldots (\pi).$$

513. Le baromètre ordinaire est peu propre à mesurer les hauteurs, parce qu'en le renversant pour le transporter, l'extrémité inférieure du tube cessant de plonger dans le mercure, il se forme un passage dans lequel l'air s'introduit, divise la colonne, et détruit l'effet qu'on doit attendre de l'instrument. On se sert d'un baromètre portatif qui a son extrémité inférieure hermétiquement fermée, et qui a son ouverture disposée latéralement à quelques lignes du fond du réservoir; de sorte que lorsqu'on renverse le baromètre, le mercure, baignant toujours cette ouverture, empêche l'air de s'y introduire. Pour mettre plus de précision dans les calculs, il faut distinguer la température de l'air, de celle du mercure, parce que lorsque l'observation est faite, l'instrument n'ayant pas eu le tems de se mettre à l'unisson de température, le métal liquide n'a pas éprouvé toute la dilatation que comporte celle de l'air ambiant : c'est pourquoi on adapte au baromètre un thermomètre dont le but est de fixer les valeurs de t et t', qui ne se rapportent qu'à la correction de h : ces valeurs doivent être employées sous le signe L de l'équation (π). On a en outre un thermomètre libre qui donne t et t' hors du signe L.

Pour mieux comprendre l'usage de notre formule, qui est si importante, nous allons l'appliquer à une des observations de Ramond au pic de Bigorre. Voici les données du problême. Un baromètre placé à Tarbes marquoit $0^m,735581$; le thermomètre fixé à l'instrument donnoit $18^d,625$, et celui qui étoit libre $19^d,125$: au haut du pic le baromètre donnoit $0,537203$, le thermomètre fixe $9,75$, celui qui étoit libre 4^d. Il est clair qu'on a

$$h=0,537203,\ h'=0,735581,\ t'+t=23,125,\ t'-t=8,875,$$

$t'+t$ est déduit des observations des thermomètres libres, et $t'-t$ de ceux des baromètres. Nous donnerons ici le type du calcul, d'autant plus que deux des logarithmes reviennent toujours. Le signe $^-$, placé au-dessus des caractéristiques, indique qu'elles sont négatives.

$$\begin{array}{ll}
L\ 5412 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 3,7333578 \\
Lh' = L\ 0,735581 \ldots\ldots\ldots\ldots & = \bar{1},8666305 \\
C^t.\,Lh = C^t.\,L\,0,537203 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0,2698638 \\
C^t.\,L\,(5412 + t' - t) = C^t.\,L\ 5420,875 & = \bar{4},2659306 \\
\hline
\text{Somme} & = 0,1357827
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
L\ 0,1357827 \ldots\ldots\ldots\ldots & = \bar{1},1328444 \\
L\ 36,672 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 1,5643346 \\
L\,(500 + t' + t) = L\ 523,125 & = 2,7186055 \\
\hline
\text{Somme} & = 3,4157845 = L\,2604^m,86
\end{array}$$

ainsi l'élévation du pic est de $2604^m,86$.

La formule (π) offre deux autres corrections, l'une est relative à la diminution de pesanteur à mesure qu'on s'élève (160, 210), l'autre dépend des latitudes des lieux d'observation : nous ne dirons rien ici de ces corrections, qu'on peut voir (*Méc. cél.*, tom. IV, pag, 289), parce qu'elles ne sont pas d'une très-grande importance. Nous avons d'ailleurs développé dans ce Traité tous les élémens propres à l'intelligence du passage du célèbre ouvrage que nous venons de citer.

... a toutes trouvées conformes aux ... la géométrie. On ne sera peut-être ... ici quelques-uns des résultats qu'il ... hauteurs suivantes sont prises du niveau ... qui est élevé de $376^m,165$ au-dessus ... mer

...	$100^m,73$	Aiguille de la Sassière........	$3389^m,88$
.....	1 192 ,06	Aiguille noire de la Vanoise..	3490 ,66
......	2038 ,18	Cornette........	2059 ,76
......	1070 ,73	Voisrons.......	1074 ,21
......	82 ,68	Dent du Corbeau.	2113 ,97
...eau	140 ,16	Grenier........	1561 ,63
...face.......	2450 ,54		
....	2727 ,76		

IV. *Des pompes.*

4. Expliquons maintenant comment l'eau s'élève dans ...OMPES. Le *piston AB* remplit exactement la capacité ...ieure d'un cylindre creux, qu'on appelle *Corps de ...pe*, et peut la parcourir dans sa longueur *VO*; ce ...idre est fermé dans une section *V* de sa hauteur, ... moyen d'un petit couvercle *E*, à *charnière*, qui ...che très-exactement l'orifice auquel il est adapté; ce ...ercle se nomme *Soupape*, il est destiné à permettre ...ermer alternativement le passage à l'eau. Une semb...le soupape est adaptée au piston en *L*. Le corps de ...pe communique à un tuyau *KH* dont l'extrémité in...ure plonge dans l'eau *RS*. Nous entendrons par *base* ...iston sa section horizontale circulaire. Fig. ...

...n distingue deux espèces de pompes: la *pompe aspirante* ...monter l'eau en aspirant l'air contenu dans le corps de ...pe; la *pompe foulante*, au contraire, agit en foulant ...uide. Expliquons le jeu de ces deux machines.

Fig. 117. 515. Supposons que l'eau étant au même niveau RS, dans le réservoir et dans le tuyau KH d'aspiration, une force P appliquée à la tige du piston, l'élève en O; l'air diminuera de ressort en se répandant dans l'espace que le piston laissera libre et exercera sur la soupape dormante E un effort moindre que ne le fait l'air renfermé dans le tuyau KH : cette soupape se lèvera donc et l'air du tuyau d'aspiration affluera dans le corps de pompe, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à avoir dans ces deux espaces OV, KH une densité égale, quoique moindre qu'à l'extérieur. Alors la soupape E, également pressée des deux côtés, se refermera par son propre poids. L'excès de pression de la part de l'air extérieur, fera donc monter l'eau dans le tuyau HK à une certaine hauteur N telle que le poids de la colonne de fluide NH, joint à la pression de l'air intérieur, équivale au poids d'une colonne de fluide de 10 mètres de haut environ. L'équilibre ainsi rétabli, si on baisse le piston, l'air renfermé dans le corps de pompe au-dessous du piston, se condensera, sans néanmoins agir sur l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration avec lequel il n'a plus de communication : ainsi l'eau dans ce tuyau restera dans le même état. Cependant l'abaissement du piston rendant l'air du corps de pompe plus dense que l'air extérieur, la soupape L doit s'élever et la densité extérieure devenir la même qu'en EB : la soupape L se referme ensuite par son propre poids. Si on recommence la même manœuvre, l'eau s'élevera de nouveau, en sorte qu'ayant enfin gagné le corps de pompe, elle passera, à chaque abaissement du piston, par le trou de la soupape L : cette soupape se fermant par son poids retiendra au-dessus d'elle l'eau qui aura passé, et que l'on élevera en même tems que le piston. Tel est le jeu de la pompe aspirante.

316. Dans la pompe foulante le piston est situé vers *N* Fig. 137.
dans le tuyau *KH*, au-dessous du niveau de l'eau *R'S'* : lorsqu'on le fait descendre il se fait un vide entre la soupape *E*, qui est alors fermée, et la base du piston. Le poids de l'eau agissant, conjointement avec celui de l'air extérieur, contre la soupape du piston, fait passer l'eau dans le tuyau *KH*, où elle reprend le niveau *R'S'*. Lorsque l'eau cesse d'entrer, la soupape du piston se ferme par son propre poids. Alors si l'on remonte le piston, il chasse devant lui l'eau qui est entrée, et l'introduit dans le tuyau *VO* en levant la soupape *E* qui se referme ensuite, et retient l'eau jusqu'à ce que, par un autre effort semblable au premier, on en fasse passer de nouvelle. Quelquefois cette pompe est différemment composée (*voy. l'Archi. hydr.*, pag. 310), mais dans toute disposition, l'effet s'explique d'une manière analogue.

317. On forme des pompes qui réunissent les effets Fig. 137.
des deux précédentes, et qu'on nomme pour cela *Pompes foulantes et aspirantes*. La soupape *L* du piston n'existe plus; mais on en adapte une à l'orifice *I* d'un tuyau *T* qui vient communiquer avec le corps de pompe. Quand le piston *AB* s'élève, il fait entrer l'eau dans l'espace *VB*, comme dans la pompe aspirante; lorsqu'il s'abaisse, il foule l'eau contenue dans cet espace, laquelle ne pouvant s'échapper par la soupape *E* qui se ferme d'elle-même, lève la soupape *I* et passe dans le tuyau *TI*.

318. A chaque coup de piston il sort un volume d'eau équivalent à un cylindre, dont la base est celle du piston, et dont la hauteur est son *jeu*, ou la quantité dont il s'élève dans le corps de pompe. Quant à la force qu'il faut employer pour mouvoir le piston, de bas en haut, en faisant abstraction du frottement et du poids du piston, *elle soutient le poids d'une colonne d'eau, qui auroit pour base celle*

du piston, et pour hauteur celle dont l'eau est élevée dans la pompe au-dessus de la surface du réservoir. La chose est évidente (277) dans la pompe foulante, puisque la base du piston n'est pressée que par la colonne d'eau qui est depuis le niveau jusqu'à la lame supérieure.

Fig. 137. Si la pompe est aspirante, le piston est d'une part visiblement chargé de toute la colonne d'eau qui est au-dessus: quant à celle BEH qui est au-dessous, elle ne peut être soutenue que par la pression que l'air extérieur exerce sur la surface RS; donc la force doit faire équilibre à cette pression qui équivaut à la colonne d'eau qui auroit pour base celle du piston, et dont la hauteur seroit égale à la distance de AB à RS. Ainsi la force qui anime le piston porte ce double poids; ce qui est conforme à ce qu'on a dit. Pour faire descendre le piston, il suffit visiblement de vaincre le frottement.

Fig. 137. Dans la pompe foulante et aspirante on doit considérer deux circonstances différentes. Quand le piston monte, il n'éprouve aucune pression de la part de l'eau renfermée dans le tuyau montant IT, parce que la soupape I est alors fermée; le moteur porte donc une colonne d'eau qui a pour base celle du piston, et pour hauteur sa distance à la superficie du réservoir. Lorsque le piston descend, comme la soupape dormante E est alors fermée, l'effort du moteur doit faire équilibre au poids d'un cylindre d'eau qui auroit pour base celle du piston, et pour hauteur la différence de niveau du fluide, dans le corps de pompe et dans le tuyau montant IT.

Fig. 137. 319. Maintenant analysons toutes les circonstances que peut offrir le jeu d'une pompe. Désignons par e et E les volumes ED et EO d'air compris depuis la soupape dormante D jusqu'au point D le plus bas, et au

point O le plus élevé de la course du piston : par y et a les hauteurs EN et EH entre cette même soupape et les niveaux N et RS du fluide : par s la section transversale du tuyau d'aspiration KH : par x la hauteur d'une colonne d'eau qui exerceroit en N la même pression que l'air raréfié renfermé dans le tuyau d'aspiration ; et par h la hauteur d'une colonne d'eau, dont le poids est égal à la pression de l'air atmosphérique (env. 10^m.).

Lorsque le piston est baissé, l'eau doit rester suspendue dans le tuyau d'aspiration à une hauteur $a-y$ telle que la pression de l'air intérieur jointe au poids du fluide, équivalent à la pression de l'air extérieur ; on a donc $h=x+a-y$ ou $x-y=b$, en faisant, pour abréger, $h-a=b$. Le volume d'air renfermé dans le tuyau d'aspiration est sy ; et comme sa densité est à celle du corps de pompe, ou de l'air extérieur, (307) dans le rapport de x à h, ce volume sy, réduit à la même densité, est $\frac{xsy}{h}$: ainsi $e+\frac{xsy}{h}$ est le volume total BN de l'air intérieur, lorsqu'il est réduit à la densité extérieure.

Les choses étant dans cet état, si on lève le piston, l'air se trouve avoir la même densité dans toute l'étendue intérieure, et l'eau monte dans le tuyau d'aspiration. Soient x' et y' ce que deviennent alors x et y. On a donc

$$x-y=b,\ \text{et}\ x'-y'=b\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Maintenant le volume d'air intérieur est $E+y's$, sa densité étant déterminée par x' ; avant d'élever le piston, le volume étoit $e+\frac{xsy}{h}$, ramené à la densité extérieure, qui est mesurée par h ; ces quatre quantités étant en proportion inverse, on a

$$x' = \frac{he + sxy}{E + sy'} \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

pour la hauteur x' de la colonne d'eau dont le poids exerceroit la même pression que l'air dilaté exerce à la surface du fluide dans le tuyau d'aspiration. On a ainsi trois équations qui déterminent y, x' et y' en fonction de x; on ne doit prendre que les racines qui répondent à $x' < h$. L'élimination donne

$$x' = \frac{bs - E}{2s} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{bs - E}{2s}\right)^2 + \frac{he}{s} + x^2 - bx\right\}}$$

$$y' = -\frac{bs + E}{2s} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{bs - E}{2s}\right)^2 + \frac{he}{s} + x^2 - bx\right\}}$$

On peut déduire de là les densités successives de l'air, et les hauteurs auxquelles l'eau s'élève à chaque coup de piston. En effet, supposons qu'il n'y ait eu aucun coup de piston donné, on a $x = h$ et $y = a$, d'où on conclut le ressort x' de l'air, et l'élévation $a - y'$ de l'eau après le premier coup de piston : substituant pour x, dans les mêmes équations, la valeur x' qu'on vient de trouver, on aura les valeurs de x' et y' répondant au second coup de piston, et ainsi de suite. On pourra même par là trouver combien chaque coup de piston élève l'eau, en prenant les différences successives des valeurs de y.

320. Pour que l'eau cesse de monter, il faut qu'on ait $y - y' = 0$, d'où $x = x'$: l'équation (2) donne $x = kh$, en faisant $\frac{e}{E} = k$, pour abréger; on en conclut $y = a - (1 - k) h$. Si donc il y a un espace e entre la soupape dormante E et le point D le plus bas de la

course du piston; lorsque l'eau sera montée à la hauteur $a - (1 - k) h$, elle ne pourra plus s'élever au-delà : de sorte que si la hauteur EH de la soupape dormante au-dessus du réservoir RS est plus grande ou même égale à cette quantité, de nouveaux coups de piston ne la feront plus élever. Cela résulte de ce que l'air dilaté du corps de pompe n'ayant pas alors un ressort moindre que celui du tuyau KN, la soupape E ne s'élève pas et la densité KN reste la même. On voit aussi qu'il faut que a soit $< h$, même lorsque k n'est pas nul.

321. Supposons que la soupape dormante soit au niveau RS, ou même au-dessous, ou entre H et K; qu'on soit parvenu à faire monter l'eau au-dessus de cette soupape, et qu'on veuille continuer de l'élever. Conservons les dénominations précédentes. Lorsque le piston est baissé, l'air qui est renfermé au-dessous est dans l'état naturel; les formules (1) et (2) ont donc encore lieu ici, en faisant $x = h$ et changeant le signe de y et y' : c'est au reste ce dont on peut s'assurer par les raisonnemens précédens; ainsi on a

$$b = x' + y' \text{ et } x' = \frac{e - sy}{E - sy'} \times h \ldots\ldots (3).$$

D'où on tire

$$x' = \frac{bs - E}{2s} \pm \sqrt{\left\{ \frac{E^2}{4s^2} + \frac{2he - bE}{2s} + \frac{1}{4} b^2 - hy \right\}}$$

$$y' = \frac{bs + E}{2s} \mp \sqrt{\left\{ \frac{E^2}{4s^2} + \frac{2he - bE}{2s} + \frac{1}{4} b^2 - hy \right\}}.$$

Si le tuyau d'aspiration et le corps de pompe ont mêmes diamètres, ces formules sont applicables dans toute l'étendue de la colonne fluide, ainsi on peut calculer les dilatations successives de l'air et les ascensions correspondantes de l'eau, comme précédemment : mais si les diamètres sont différens, on appliquera les formules (3), tant que l'eau n'aura pas atteint le point V de jonction du tuyau d'aspiration au corps de pompe ; après quoi prenant ce point pour origine des y, y', a, E et e, les mêmes formules seront applicables aux ascensions de l'eau dans le corps de pompe, pourvu que s en désigne la section : c'est ce dont on peut aisément s'assurer. Ceci donne l'ascension de l'eau au-dessus de la soupape dormante E lorsqu'elle est placée en ce point de jonction.

322. Le fluide cessera de monter si on a dans quelques cas $y' = y$, ce qui donne $b - y = \frac{(e - sy)\,h}{E - sy}$, d'où $sy^2 - y\,(E - as) = eh - Eb$. Tant que cette équation est impossible, le fluide doit monter; mais comme elle a ses racines réelles lorsque $(sa + E)^2$ est $> 4\,sh\,(E - e)$, on a deux points entre lesquels l'ascension de l'eau cesse d'avoir lieu : alors le carré de la moitié du volume OH est plus grand que $h \times$ volume OD ou 32 fois le volume décrit par le mouvement du piston.

Fin de l'Hydrostatique.

LIVRE IV.

HYDRODYNAMIQUE.

I. *De l'Ecoulement des fluides par des orifices horisontaux.*

523. On sait que lorsqu'un fluide pesant et incompressible sort d'un vase par une ouverture faite au fond ou aux parois, sa surface demeure toujours horisontale, au moins sensiblement, en supposant que les parois du vase conduisent à l'orifice sans rompre la loi de continuité, et en faisant abstraction de la cause qui produit au-dessus de l'orifice une espèce d'entonnoir, quand la surface du fluide est très-proche de l'orifice. Il résulte de là que, si on conçoit une infinité de tranches horisontales dans le fluide, elles conserveront en s'abaissant leur parallélisme; et que de plus, chaque point d'une même tranche descend verticalement, en faisant abstraction des molécules qui sont près des parois courbes ou inclinées, parce que leur nombre est infiniment petit par rapport à celui des autres points de la tranche. Nous supposerons donc ici, d'après ces raisonnemens, comme un fait dû à l'expérience, que *lorsqu'un fluide s'écoule d'un vase* CApqB *par un orifice* Fig. 138. *horisontal* pq, *toutes les tranches horisontales du fluide conservent en s'abaissant leur parallélisme*, de sorte que tous les points d'une même tranche ont la même vîtesse.

verticale. Et pour rendre cette hypothèse plus conforme aux observations, nous regarderons la distance entre la surface supérieure AB du fluide et l'orifice pq comme assez considérable pour que la surface ne présente pas l'entonnoir dont on a parlé. La figure de la paroi intérieure du vase est supposée connue et donnée par son équation en x, y et z; les z étant comptés sur la verticale Ck qui passe par l'orifice pq, et l'origine étant en un point quelconque C. Toute section horisontale du vase, telle que $TV = \xi$, aura donc une figure déterminée en fonction de $CQ = z$: il en est de même de la surface supérieure $AB = K$ du fluide, laquelle peut être constante ou varier avec $CR = l$; on connoît aussi l'aire $pq = k$ de l'orifice, que nous supposons être une section du vase répondant à la hauteur $Rk = h$, ou à l'abscisse $Ck = l + h$.

Si on conçoit le fluide partagé en une infinité de tranches horisontales $ABba$, il faudra, par hypothèse, que toutes les molécules qui composent l'une de ces tranches aient la même vitesse verticale; soit v celle de la tranche quelconque TV pour laquelle $CQ = z$ et $TV = \xi$: v est fonction de x et t. Toutes ces tranches agissent les unes sur les autres dans toute l'étendue Rk; en sorte que si la vîtesse des unes est accélérée par le poids de celles qui sont au-dessus d'elles, la vîtesse de celles-ci est diminuée par les autres dont l'écoulement ne se fait pas avec la même rapidité que si le fluide tomboit librement. Nous désignerons par u la vîtesse du fluide qui s'écoule, au bout du tems t, par l'orifice pq; u n'est fonction que de t; et par p la pression verticale exercée de haut en bas à la surface TV, au même instant : cette pression est rapportée à l'unité de surface (268).

La nature du problême que nous nous proposons de résoudre comporte deux sortes de variations qu'il est important de bien distinguer. Tantôt on a pour but de considérer les espaces décrits par une molécule *dans des tems successifs*; nous affecterons du signe $\int$ les intégrales que cette circonstance introduira; tantôt aussi on considère, *au même instant*, deux molécules de la masse fluide, déterminées par des valeurs de z différentes : nous emploierons la caractéristique S pour désigner les intégrales qui se rapportent à ce cas, et qui sont uniquement relatives à la forme du vase, et absolument indépendantes du tems et du mouvement.

324. Cette notation établie, considérons le mouvement de la tranche VT au bout du tems t; la vîtesse v de cette tranche s'accroîtra de dv dans l'instant dt qui suit, ou plutôt $\frac{dv}{dt}dt$, puisqu'ici on ne considère que la variation que v éprouve lorsqu'il s'agit d'une même tranche de fluide. Or, s'il n'y avoit aucune action des molécules les unes sur les autres, l'accroissement de vîtesse seroit gdt; d'où il suit que durant le tems dt la tranche TV perd, en vertu de cette action mutuelle, la vîtesse... $\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dt$. Par le principe de d'Alembert (229) si chaque tranche n'étoit mue que par la force verticale $g-\frac{dv}{dt}$ l'équilibre auroit lieu : pour exprimer cette condition, il faut recourir à l'équation (C, 270) et faire $X=0$, $Y=0$, $Z=g-\frac{dv}{dt}$; la densité D étant $=1$, on trouve

$$p=S\left(g-\frac{dv}{dt}\right)dz\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

L'intégrale doit être prise depuis la surface AB du fluide jusqu'à la tranche indéterminée dont on cherche la pression, t étant constant (*).

325. Il convient de distinguer dans notre intégrale la partie qui dépend du tems de celle qui est fonction de z, car v et la différentielle dv relative au tems, sont des fonctions de z et t. Pour cela, observons qu'en vertu de l'incompressibilité du fluide, la tranche TV ne peut descendre de dz durant l'instant dt, sans qu'il s'écoule en même tems par l'orifice k une portion égale de fluide:

(*) Soient ξ', ξ''.... les aires des tranches de fluides; v', v''... leurs vitesses; $g\xi'dz$, $g\xi''dz$.... sont les forces motrices qui les sollicitent : or par la réaction des parties $\frac{dv'}{dt}.\xi'dz$, $\frac{dv''}{dt}.\xi''dz$.... sont les forces qui ont lieu : les forces perdues sont donc... $\left(g-\frac{dv'}{dt}\right)\xi'dz$, $\left(g-\frac{dv''}{dt}\right)\xi''dz$.... D'après cela la première tranche exerce sur la seconde la pression $\left(g-\frac{dv'}{dt}\right)\xi'dz$, pression qui se transmet à la troisième par l'intermédiaire de la seconde; en multipliant par le rapport $\frac{\xi'''}{\xi'}$ des surfaces pressées (α, 267), on a pour la pression de la première tranche sur la troisième $\left(g-\frac{dv'}{dt}\right)\xi'''dz$, laquelle, jointe à celle qu'exerce la seconde, donne $\left(2g-\frac{dv'}{dt}-\frac{dv''}{dt}\right)\xi'''dz$; on trouvera de même $\left(3g-\frac{dv'}{dt}-\frac{dv''}{dt}-\frac{dv'''}{dt}\right)\xi^{\text{IV}}dz$, pour la pression exercée sur la quatrième tranche. Celle qui a lieu sur une tranche quelconque TV est donc $g\times RQ.\xi-\xi S.\frac{dv}{dt}dz$: en divisant par ξ, on obtient la pression p sur l'unité de surface; ce qui s'accorde avec ce qu'on vient de voir. (C'est M. *Poisson* qui m'a communiqué cette démonstration.)

ces quantités étant visiblement $kudt$ et ξdz, on a

$$kudt = \xi dz\text{, d'où } ku = v\xi \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

à cause de $dz = vdt$: v et ξ sont des fonctions de z et t, qui cependant sont telles que leur produit $v\xi$ est indépendant de z, puisqu'il est $= ku$; il en est de même de ξdz : ainsi $v\xi$ et ξdz sont constantes relativement à notre intégration.

Cela posé, 1°. $S.gdz = gz'$, entre les limites $z = l = CR$ et $z = z' + l = CQ$, z' étant la distance RQ de la surface supérieure du fluide à la tranche quelconque TV ; 2°. $v = \frac{ku}{\xi}$ donne $\frac{dv}{dt} = \frac{k}{\xi}.\frac{du}{dt} - \frac{ku}{\xi^2}.\frac{d\xi}{dt}$; d'où

$$S.\frac{dv}{dt}dz = k.\frac{du}{dt}S.\frac{dz}{\xi} - kuS.\frac{d\xi}{\xi^2}.\frac{dz}{dt}.$$

L'intégrale $S.\frac{dz}{\xi}$ devra être prise entre les mêmes limites ; elle sera connue en fonction de z, puisque ξ se déduit de l'équation de la paroi du vase : quant au second terme, comme ξdz est constant, il équivaut à $-ku.\xi\frac{dz}{dt}S.\frac{d\xi}{\xi^3}$; et comme d'une part $\xi\frac{dz}{dt} = ku$; et que de l'autre $S.\frac{d\xi}{\xi^3} = \frac{1}{2K^2} - \frac{1}{2\xi^2}$ entre les limites désignées ; on a en réunissant ces résultats

$$\text{p} = A + gz' - k\frac{du}{dt}S.\frac{dz}{\xi} + \tfrac{1}{2}u^2\left(\frac{k^2}{K^2} - \frac{k^2}{\xi^2}\right)\ldots (\rho) ;$$

A désignant la pression que l'atmosphère, ou toute autre cause, exerce sur chaque unité de la surface supérieure AB. Cette équation détermine p en fonction de z, z' et u ;

de sorte qu'il faut maintenant trouver des relations entre ces variables, qui se rapportent à l'écoulement du fluide par l'orifice k; $ku = v\xi$ donnera ensuite la vitesse d'une tranche quelconque.

326. Pour appliquer l'équation (ε) à la tranche fluide qui s'écoule par l'orifice, il faut faire $\xi = k$, $p = A$: $z = Ck = h + l$ et $z' = Rk = h$: l'intégrale $S.\frac{dz}{\xi}$ qui reste à effectuer devra être prise entre les limites $z = l$ et $z = l + h$; désignons par N la fonction de l et h qui en résultera, nous aurons (*)

$$gh - kN.\frac{du}{dt} - \tfrac{1}{2}u^2\left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right) = 0 \ldots\ldots(\sigma);$$

équation entre u et t qui sert à trouver la vitesse u du fluide qui s'écoule.

327. Si l'orifice k est infiniment petit, l'équation précédente se réduit à $u^2 = 2gh$, ce qui prouve que *lorsqu'un fluide incompressible et pesant s'écoule d'un vase par un orifice infiniment petit, il a, à sa sortie du vase, une vitesse due à la hauteur de la surface supérieure*

(*) L'équation (σ) peut être démontrée immédiatement par les raisonnemens mêmes que nous avons employés pour obtenir p : car si chaque tranche fluide n'étoit animée que de la vitesse $gdt - dv$, il y auroit équilibre; de sorte qu'un fond qui fermeroit l'orifice pq ne devroit pas éprouver de pression. Or la pression sur le fond horisontal (277) est $S(gdt - dv)dz$, l'intégrale étant prise dans toute l'étendue du fluide, c'est-à-dire de la surface AB à l'orifice pq : il faut donc ici que cette intégrale soit nulle, d'où $gdt\,Sdz - Sdvdz = 0$. Or $Sdz = h$, entre les limites $z = l$ et $z = l + h$. On a trouvé ci-dessus $S.dvdz$, seulement il faut étendre la seconde limite jusqu'à l'orifice : ainsi on obtient l'équation (σ).

du fluide, au-dessus de l'orifice. Cette conséquence a lieu quelles que soient les figures du vase et de l'orifice.

528. On peut mettre l'équation (σ) sous une forme plus simple, en désignant par α la hauteur due à la vîtesse u, ce qui donne $u^2 = 2g\alpha$; et faisant pour abréger.... $1 - \frac{k^2}{K^2} = M$, on a

$$h - \frac{kN}{\sqrt{(2g\alpha)}} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = M\alpha \ldots\ldots\ldots (\tau).$$

529. Tout ce qui vient d'être exposé a lieu, soit que le vase se vide sans recevoir de nouvelle eau, soit que chaque partie de fluide écoulé soit renouvelée en AB par une nouvelle couche de fluide ayant même vîtesse que celle qu'elle remplace. Quand le premier cas a lieu, h, z' et l sont des grandeurs variables, il convient donc d'obtenir une relation entre h et les autres variables. Fig. 138.

Les volumes de fluide qui s'écoulent dans le même tems par l'orifice k et par la tranche supérieure K étant égaux, on a $kudt$ ou $k.\sqrt{(2g\alpha)}\, dt = -Kdh$: on met ici le signe $-$, parce que t croît lorsque h décroît. L'équation (τ) devient donc

$$Khdh + Nk^2 d\alpha - K\alpha\left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right) dh = 0 \ldots (\varphi).$$

K est alors fonction de h. Supposons $\frac{Kh}{Nk^2} = -Q$, $\frac{k^2 - K^2}{k^2 KN} = P$; nous aurons $d\alpha + P\alpha dh = Qdh$. Cette équation s'intègre par les formules connues des équations différentielles linéaires. (Voy. *Cal. int. élém.* de Lacroix, 257 et 265). On obtient ainsi la relation entre h et α; $\alpha = e^{-\int Pdh} \times \int Qe^{\int Pdh}\, dh$. On en aura ensuite une entre h et t, en observant que $u=\sqrt{(2g\alpha)}=-\frac{K}{k}\cdot\frac{dh}{dt}$, ce qui donne la loi des abaissemens successifs du fluide.

330. Un des objets qu'on a plus particulièrement en vue dans la théorie qui nous occupe, est le volume de fluide écoulé par l'orifice au bout d'un tems donné. Pour le déterminer, observons que ce volume peut être regardé comme égal à celui d'un prisme qui auroit l'orifice k pour base, et une hauteur ζ variable avec le tems: il s'agit donc de trouver ζ en fonction de t. Pour cela, on a $u^2=2g\alpha$, d'où $udu=gd\alpha$ et $udt=d\zeta$. Divisant la seconde de ces équations par la troisième, on a $\frac{du}{dt}=g\cdot\frac{d\alpha}{d\zeta}$. Ce qui change l'expression (σ) en

$$hd\zeta-kNd\alpha=M\alpha d\zeta \ldots\ldots\ldots\ldots (\chi).$$

331. Lorsque le fluide est constamment entretenu à la même hauteur dans le vase, K et M sont constans, (σ) donne la vîtesse u en fonction de t; et on sépare aisément les variables dans l'équation (χ), dont l'intégrale est

$$\zeta M=-Nk\left\{\log(h-M\alpha)+C\right\};$$

$\alpha=0$ donne $\zeta=0$, donc $C=-\log.h$, et

$$M\zeta=Nk.\log\left(\frac{h}{h-M\alpha}\right), \text{ d'où } \alpha=\frac{h}{M}\left(1-e^{-\frac{M\zeta}{Nk}}\right)$$

e étant le nombre dont le logarithme népérien est $=1$.

Ces expressions donnent en quantités finies, la relation entre la hauteur ζ du prisme de fluide écoulé et la hauteur α due à la vîtesse à l'orifice. Si on veut obtenir t en fonction de α, comme $udt=d\zeta=\frac{Nkd\alpha}{h-M\alpha}$, en remettant

$\frac{u^2}{2g}$ pour a, on a $dt = 2Nk \cdot \frac{du}{2gh - Mu^2}$, formule dont l'intégration rentre dans la théorie des fractions rationnelles.

Enfin la relation entre t et ζ se trouve aisément, car on a $d\zeta = udt = dt.\sqrt{(2ga)}$; mettons pour a sa valeur ci-dessus, et, pour faciliter l'intégration, faisons $a = \frac{h}{M}.x^2$, ce qui donne $\zeta = -\frac{Nk}{M}.\log(1-x^2)$, et $d\zeta = \frac{2Nk}{M}.\frac{xdx}{1-x^2}$. Donc $dt = \frac{2Nk^2}{\sqrt{(2ghM)}}.\frac{dx}{1-x^2}$: expression dont l'intégration n'offre aucune difficulté. Les constantes se déterminent, dans ces deux derniers cas, en observant que $\zeta = 0$ donne $t = 0$, $a = 0$ et $x = 0$.

II. *De l'écoulement par de petits orifices; Clepsydres.*

352. On ne doit pas oublier qu'on a supposé, dans tout ce qui vient d'être dit, que k est l'orifice inférieur, qui est l'intersection de la surface courbe qui forme la paroi intérieure du vase, par un plan horisontal. S'il n'en étoit pas ainsi, il paroît qu'il se formeroit un vase fictif, et qu'à la partie inférieure il y auroit une portion de fluide stagnant; mais comme la figure de ce vase est inconnue, il devient absolument impossible de déterminer les circonstances du mouvement. Cependant la forme du vase étant arbitraire (326), lorsque l'orifice est très-petit par rapport aux diverses sections horisontales du vase, on voit que le théorême démontré dans ce paragraphe est vrai, lorsque l'orifice est simplement pratiqué dans la paroi.

333. On a $u=\sqrt{(2gh)}$, (327); or gh est le poids d'un prisme de fluide qui a l'unité pour base et h pour hauteur, la densité étant $=1$; ainsi gh est la pression, rapportée à l'unité de surface, qui s'exerceroit à l'orifice supposé bouché; et cette pression est la seule cause productrice de la vitesse u, puisque c'est le seul élément susceptible de modification. Or toutes les fois que la hauteur h de la surface supérieure d'un fluide pesant, au-dessus d'une surface infiniment petite, reste la même, la pression de cette surface est aussi la même, quelle que soit son inclinaison (279); donc, puisque cette pression est la seule cause productrice de la vitesse d'un fluide jaillissant par un orifice infiniment petit, l'effet produit ou la vitesse, sera la même lorsque la cause sera la même. Ainsi $\sqrt{(2gh)}$ sera la vitesse du fluide jaillissant par un orifice infiniment petit sous une hauteur h, quelle que soit l'inclinaison de cet orifice, sa figure et celle du vase.

Les circonstances du mouvement du fluide à la sortie du vase peuvent donc être déterminées d'après ce qu'on a dit page 230, puisqu'il n'est question que de considérer le mouvement d'un corps lancé dans une direction déterminée, et avec une vitesse connue.

Si donc un fluide s'écoule dans le vide par un orifice vertical, chacune des molécules décrira une branche de parabole à partir du sommet, l'axe de cette courbe sera vertical: son équation sera $y=-\frac{x^2}{4h}$, h étant la hauteur du fluide dans le vase au-dessus de l'orifice; en faisant $\theta=0$, dans l'équation (h').

334. On sait (157, V) qu'un mobile qui par sa chute a acquis une vitesse due à une certaine hauteur, doit remonter à la même hauteur en vertu de cette vitesse : ainsi *un fluide jaillissant verticalement de bas en haut par un*

petit orifice, doit remonter à la même hauteur à laquelle la surface du fluide est élevée dans le réservoir : on fait ici abstraction de la résistance de l'air.

335. De ce que la vitesse d'un fluide qui s'écoule par un orifice infiniment petit, est $u = \sqrt{(2gh)}$, il s'ensuit que si le fluide est entretenu dans le vase à la même hauteur h, par une quantité d'eau affluente égale à celle qui s'écoule, il sortira dans chaque unité de tems un prisme de fluide d'un volume $= k\sqrt{(2gh)}$. Ainsi le volume Q qui s'écoulera pendant un tems donné t, sera

$$Q = kt\sqrt{(2gh)} \ldots\ldots\ldots\ldots (\psi).$$

Nous ferons observer que cette équation renferme quatre quantités, Q, k, t et h, et qu'elle pourra servir à déterminer l'une d'elles d'après la connoissance des trois autres; ainsi de ces quatre choses la grandeur de l'orifice, le tems de l'écoulement, la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice, et le volume écoulé, trois étant données, on pourra toujours trouver l'autre.

Par exemple, si le vase est un prisme vertical (percé à son fond par un orifice très-petit) dont la section horisontale soit K, Kh est le volume du fluide qu'il contient. Si donc on fait $Q = Kh$, le vase, entretenu constamment plein, emploiera à la dépense d'un volume d'eau égal Kh, c'est-à-dire égal à celui qu'il contient, un tems........

$$t = \frac{K}{k}\cdot\sqrt{\left(\frac{h}{2g}\right)}.$$

Il suit aussi de l'équation (ψ) que lorsque deux vases sont entretenus constamment pleins, les quantités de liqueurs qui s'écoulent dans le même tems sont entre elles comme les produits des orifices par les racines carrées des hauteurs. Car on aura pour le second vase $Q' = k't\sqrt{(2gh')}$, en marquant d'un trait les lettres qui se rapportent à c.

vase : il résulte de là $\frac{Q}{Q'} = \frac{k\sqrt{h}}{k'\sqrt{h'}}$. Ainsi connoissant par expérience ce qui est relatif à l'un des écoulemens, on pourra déterminer ce qui a rapport à l'autre.

536. Lorsque l'eau qui s'écoule n'est ni en totalité ni en partie remplacée, la vîtesse à l'orifice diminue graduellement à mesure que le fluide s'abaisse dans le vase. L'eau jaillit donc avec une force de moins en moins grande, et l'amplitude du jet diminue sans cesse.

Si donc K désigne l'aire de la section du vase par un plan passant par la surface supérieure du fluide au bout du tems t, z la hauteur dont pendant ce tems le fluide s'est abaissé, et h la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice au commencement du tems; $h-z$ sera cette hauteur au bout du temt t, et on aura pour la vîtesse à l'orifice $\sqrt{[2g(h-z)]}$. Cette vîtesse peut être regardée comme constante pendant le tems dt durant lequel il s'écoulera un prisme de fluide qui aura l'orifice k pour base et $dt\sqrt{[2g(h-z)]}$ pour hauteur. Ainsi le volume du fluide écoulé pendant l'instant dt est $kdt\sqrt{[2g(h-z)]}$. Mais pendant ce tems la surface supérieure du fluide s'est abaissée de dz, et le vase a perdu un cylindre de fluide ayant dz pour hauteur et K pour base, cylindre dont le volume est par conséquent Kdz : en égalant ces deux valeurs, on en conclut

$$dt = \frac{Kdz}{k\sqrt{[2g(h-z)]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Comme l'aire K doit être donnée en fonction de z, par la forme du vase, le second membre de cette équation ne contient que la variable z; et il sera très-aisé de connaître, par une intégration, les abaissemens successifs du fluide dans un vase de forme donnée.

337. Appliquons cette théorie à quelques exemples.

I. Si le vase est un prisme ou un cylindre vertical, l'aire K est constante et égale à la section horisontale du corps. Ainsi on a

$$t=\frac{K}{k\sqrt{(2g)}}\cdot\int\frac{dz}{\sqrt{(h-z)}}=-\frac{2K}{k\sqrt{(2g)}}\sqrt{(h-z)}+C.$$

Lorsque le tems t est nul, l'abaissement z de la surface supérieure du fluide est nul : ainsi on a en même tems $z=0$ et $t=0$; cette condition détermine la constante C, et donne pour le tems de l'écoulement d'une hauteur z de fluide

$$t=\frac{2K}{k\sqrt{(2g)}}[\sqrt{h}-\sqrt{h-z}].$$

On peut trouver aisément le tems de l'écoulement total; il ne s'agit pour cela que de faire $z=h$, et on a $t=\frac{K}{k}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Ce tems est double de celui qui a été trouvé (336) pour le cas où le vase reste constamment plein.

II. S'il s'agissoit en général d'un solide de révolution, dont l'axe fût vertical, K seroit l'aire d'un cercle qui auroit pour rayon l'ordonnée y de la courbe génératrice; on auroit donc $K=\pi y^2$, et l'équation (a) donneroit

$$t=\frac{\pi}{k\sqrt{(2g)}}\cdot\int\frac{y^2dz}{\sqrt{(h-z)}}.$$

Il faudroit mettre pour y sa valeur déduite, en fonction de z, de l'équation de la courbe génératrice, et intégrer : en complettant l'intégrale de manière à avoir en même tems $t=0$, et $z=0$, on auroit par là t en fonction de z.

Supposons par exemple que la paroi intérieure du vase soit engendrée par la révolution d'une parabole BAC, autour de l'axe vertical Az. Soit BC la surface supérieure du fluide quand le tems est nul; et faisons $AD = h$: l'équation est $y^2 = px$, p est le paramètre; l'orifice et l'origine sont en A; donc en transportant l'origine en D, l'équation est $y^2 = p(h - z)$, et en substituant on a

$$t = -\frac{2\pi p}{5k\sqrt{(2g)}} \cdot (h - z)^{\frac{5}{2}} + C;$$

et comme $z = 0$ donne $t = 0$, on a

$$t = \frac{2p\pi}{5k\sqrt{(2g)}} \cdot [h^{\frac{5}{2}} - (h - z)^{\frac{5}{2}}].$$

On aura le tems de l'écoulement total en faisant $h = z$.

558. La théorie que nous venons d'exposer peut servir à marquer sur les parois des vases des divisions propres à mesurer les tems employés dans l'écoulement par les différens abaissemens du fluide. On nomme un pareil système, *Horloge d'eau* ou *Clepsydre*. Ces machines occupent une place intéressante dans l'histoire des sciences et des arts, par l'usage qu'en ont fait les anciens peuples pour la mesure du tems. On en attribue l'invention à Scipion Nasica, qui vivoit environ 200 ans avant Jésus-Christ; mais il est vraisemblable qu'il en a seulement fait connoître l'usage à Rome; et que les Égyptiens, qui s'en servoient pour mesurer le cours du soleil, les connoissoient à une époque fort antérieure. L'usage des horloges à pendules isochrones tenoit à des notions qui exigeoient le concours des découvertes faites postérieurement dans les sciences et les arts.

La manière dont les anciens ont tiré parti de l'écoulement de l'eau pour sous-diviser la durée des années et des jours est souvent très-intéressante. Les idées de l'eau qui s'écoule, et du tems qui fuit, offrent par leur rapprochement des images agréables et des comparaisons, que la philosophie et la poésie ne pouvoient manquer de saisir. La clepsydre de *Ctesibius* en offre un exemple ingénieux. On ne peut se refuser à une secrette et douce mélancolie en voyant l'eau s'échapper, en forme de pleurs, des yeux d'une figure qui semble payer ce tribut de regrets aux instans qui s'échappent. Cette eau se rend dans un réservoir vertical, où elle élève une autre figure qui tient une baguette au moyen de laquelle, et de son ascension graduelle, elle indique les heures sur une colonne. Le même fluide sert ensuite de moteur dans l'intérieur du piédestal à un mécanisme qui fait faire à la colonne une révolution autour de son axe, dans un an, de telle sorte que le mois et le jour où l'on est se trouvent toujours sous l'index, dont l'extrémité parcourt une verticale divisée convenablement.

339. Il est évident que tout vase peut servir à former une clepsydre; mais la manière la plus commode seroit de se servir d'un vase, dont la forme fût telle que des portions égales de tems fussent mesurées par des divisions égales de l'axe vertical du vase. Si donc on veut que le fluide s'abaisse d'une grandeur donnée a dans chaque unité de tems, comme $\frac{dz}{dt}$ représente l'abaissement du fluide dans cette unité, il suffira de faire $\frac{dz}{dt}=a$, ce qui donnera pour l'équation (α)

$$aK=k\sqrt{[2g(h-z)]}.$$

Le rapport entre K et z est d'ailleurs arbitraire, c'est-à-dire qu'on peut disposer de l'aire K répondant à l'abaissement z. Supposons donc, comme cela est convenable, que le vase soit symétrique par rapport à l'axe vertical des z, on pourra prendre pour K une fonction arbitraire $f(y)$ d'une ordonnée horisontale, et l'équation $af(y)=k\sqrt{2g(h-z)}$] sera celle du profil vertical de la clepsydre.

On pourroit, si on jugeoit à propos, prendre pour les abaissemens du fluide pendant des tems successifs égaux une fonction du tems; il faudroit alors faire dans l'équation (ω), $\frac{dz}{dt}=\varphi(t)$; mais ce seroit une généralité inutile pour la pratique.

Si on suppose que l'on veut construire le vase de manière à obtenir des rectangles pour les sections horisontales, en nommant p l'un des côtés et y l'autre, il faudra faire $K=py$, et substituer dans l'équation précédente : on aura

$$y^2=2g(h-z)\left(\frac{k}{pa}\right)^2,$$

qui appartient à la parabole; ainsi le profil vertical du vase sera une parabole dont le sommet est en bas à l'orifice.

De même si on veut que les sections K soient des cercles, il faudra prendre $K=\pi y^2$, ce qui donnera pour l'équation du profil vertical de la clepsydre

$$y^4=2g(h-z)\left(\frac{k}{\pi a}\right)^2.$$

540. Il y a quelques corrections à faire aux développemens qui viennent d'être donnés. Dans l'état physique

des choses, lorsque la surface du fluide approche de l'orifice, il se forme au-dessus de cet orifice une espèce d'entonnoir dans lequel l'air s'introduit, ce qui empêche en partie le fluide de sortir et change la nature de l'écoulement. Ce que nous venons de dire n'a donc lieu que jusqu'au moment où l'entonnoir commence à se former ; et cela arrive, pour l'ordinaire, lorsque la surface du fluide est à un décimètre de l'orifice.

De plus, on a reconnu par l'expérience, que lorsqu'un fluide incompressible s'échappe d'un vase par une ouverture, que je supposerai circulaire, le jet n'avoit pas une forme cylindrique et diminuoit progressivement de diamètre, depuis l'origine jusqu'à une certaine distance, peu différente dans beaucoup de cas du demi-diamètre de cet orifice. Ainsi le jet affecte, dans cet intervalle, la forme d'un cône tronqué dont la grande base est l'orifice même. Or, pour évaluer la dépense, il faut à cet orifice substituer la petite base du cône tronqué qui renferme tous les filets fluides jaillissans hors du vase, lorsqu'on connoît ou la vitesse commune ou la vitesse moyenne de ces filets. La diminution du diamètre du jet, depuis l'orifice jusqu'à une certaine distance de cet orifice, est ce qu'on a appelé *la contraction de la veine fluide*.

L'expérience a appris que lorsque l'eau s'écoule d'un vase par un petit orifice percé dans une mince paroi, la dépense effective est à-peu-près 0,62 de la dépense théorique calculée par la formule du n°. 331. Ce déchet est occasionné par la contraction de la veine fluide, et il demeure le même lorsqu'on adapte à l'orifice un ajutage dont la longueur est égale à la distance de cet orifice à la section de la plus grande contraction, et dont la paroi intérieure a la forme conoïde affectée dans cet intervalle les coordonnées de c sont [illegible] pour celles de c', il faut seulement changer [illegible] et ainsi :

$$x + dx + u + \frac{du}{dx}\,dx \ldots\ldots \text{ suivant les } x,$$

$$y + v + \frac{dv}{dx}\,dx \ldots\ldots \text{ suivant les } y,$$

$$z + w + \frac{dw}{dx}\,dx \ldots\ldots \text{ suivant les } z.$$

La longueur de Mc devient donc $Mc = dx\left(1 + \frac{du}{dx}\right)$

en se bornant aux termes du 1er ordre. On peut déduire de là les longueurs des autres arêtes variées ; pour Mb, par exemple, il suffit de changer x en y, u en v, etc.... On trouve ainsi que 1°. les trois arêtes de l'angle trièdre M sont devenues

$$dx\left(1 + \frac{du}{dx}\right),\quad dy\left(1 + \frac{dv}{dy}\right),\quad dz\left(1 + \frac{dw}{dz}\right);$$

2°. Les autres arêtes sont respectivement égales à celles qui leur sont opposées, de sorte que *le corps varié est devenu un parallélipipède obliquangle*. Nous regardons les faces comme planes, ce qu'on ne peut contester, lorsqu'on se borne aux termes du 1er ordre, puisqu'elles n'ont pu varier qu'infiniment peu. Le volume d'un parallélipipède est, comme on sait, le produit de ses trois arêtes par les sinus des angles formés par deux d'entre elles, et par la troisième avec leur plan ; or ici ces angles diffèrent très-peu d'un droit, de sorte que leurs complémens π, λ, sont infiniment petits ; nos sinus équivalent à cos π et cos λ, qui, en développant et se bornant au 1er ordre, se réduisent à 1. Ainsi au 1er ordre près, le volume varié est le produit des trois arêtes ci-dessus ou

$$dxdydz\left\{1+dt\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\right\}.$$

Que le fluide soit ou non compressible, la masse $Ddxdydz$ n'a pu changer, ainsi sa différentielle est nulle; D est la densité de la molécule: on a donc par logarithmes $\frac{dD}{D}+\frac{d(dxdydz)}{dxdydz}=0$: or la différentielle de $dxdydz$ ne se prend pas ici par les voies ordinaires, et il est clair qu'elle est l'accroissement du volume qu'on vient de déterminer; donc

$$\frac{dD}{D}+\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)dt=0\ldots\ldots(B).$$

Les vîtesses u, v et v sont des fonctions de t liées à x, y et z par $dx=udt\ldots\ldots$ ainsi les intégrales de nos équations (A) et (B) résolvent le problême proposé; et comme elles sont aux différences partielles, elles comportent des fonctions arbitraires qui dépendent du mouvement et de la disposition du fluide au commencement du tems.

544. Il faut distinguer deux sortes de variations, comme pag. 373 et 460; tantôt le tems est constant; on compare alors au même instant deux molécules fluides: tantôt on suit une même molécule dans ses diverses positions successives; c'est de ce dernier cas qu'il s'agit principalement ici. Or le lieu d'une molécule est déterminé à l'instant donné, lorsqu'on connoît les coordonnées a, b, c, qui fixent sa position initiale: ainsi x, y, z sont des fonctions de a, b, c et t: on doit en dire autant des vîtesses u, v, v et de la densité D lorsqu'elle est variable. Si donc on connoissoit cette fonction pour u, ou....... $u=f(a, b, c, t)$, on obtiendroit $\frac{du}{dt}$ en différentiant

f relativement à t seul. Mais il n'en est pas ainsi ; pour la connoissance actuelle du mouvement du fluide, il suffit de connoître à chaque instant celui d'une particule quelconque qui occupe un lieu donné dans l'espace, sans qu'il soit nécessaire d'en connoître les états précédens. Il est donc plus simple d'envisager u comme fonction de x, y, z et t, ou $u = F(x, y, z, t)$; ce qui suppose qu'on a substitué dans $f(a, b, c, t)$ pour a, b, c, leurs valeurs en x, y, z et t, dont on a vu qu'elles sont fonctions. Or outre les t qui existent dans f, cette substitution en introduira d'autres qu'il faut regarder comme constans, lorsqu'on veut déduire $\frac{du}{dt}$ de F au lieu de f ; ainsi il ne faudroit pas faire varier t dans x, y et z. Donc la différentielle relative à t de $\frac{du}{dt}$ ou $\frac{d^2x}{dt}$, se compose de $\frac{du}{dt}$ et des différentielles de F relatives à t considéré comme faisant partie de x, y, z. Il en résulte que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}.\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}.\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}.\frac{dz}{dt},$$

on a pour v, v et D des résultats analogues ; donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} + u.\frac{du}{dx} + v.\frac{du}{dy} + \text{v}.\frac{du}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} + u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{dv}{dy} + \text{v}.\frac{dv}{dz}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\text{v}}{dt} + u.\frac{d\text{v}}{dx} + v.\frac{d\text{v}}{dy} + \text{v}.\frac{d\text{v}}{dz}$$

$$dD = \left(\frac{dD}{dt} + u.\frac{dD}{dx} + v.\frac{dD}{dy} + \text{v}.\frac{dD}{dz}\right)dt$$

en introduisant ces valeurs dans (A) et (B), on a

$$dq - \frac{d\text{p}}{D} = \frac{d\chi}{dt} + u \cdot \frac{d\chi}{dx} + v \cdot \frac{d\chi}{dy} + \text{v} \cdot \frac{d\chi}{dz} \ldots (C)$$

$$\chi = udx + vdy + \text{v}dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

$$\text{o} = \frac{dD}{dt} + \frac{d.Du}{dx} + \frac{d.Dv}{dy} + \frac{d.D\text{v}}{dz} \ldots (E)$$

La première équivaut toujours à trois autres, et, pour abréger, on y a désigné par χ la valeur exprimée par la seconde : la troisième exprime *la continuité du fluide*; lorsque le fluide est homogène et incompressible, D est constant et disparoît de (E); on a

$$\text{o} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{d\text{v}}{dz} \ldots\ldots\ldots\ldots (F);$$

dans tout autre cas D est une fonction donnée de p ou de x, y et z.

344. Malgré la forme plus simple de ces équations, elles sont encore tellement compliquées, que leur intégration et la détermination des fonctions arbitraires surpasse de beaucoup les forces de l'analyse. Cependant l'intégration s'exécute en général dans un cas très-étendu; c'est celui où la fonction χ est une différentielle exacte, relativement à x, y et z. Car, soit

$$\chi = d\phi, \text{ d'où } u = \frac{d\phi}{dx}, v = \frac{d\phi}{dy}, \text{v} = \frac{d\phi}{dz} \ldots\ldots\ldots (G)$$

l'équation (C) s'intègre, D étant fonction de p, et on a

$$q - \int \frac{d\text{p}}{D} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right\} \ldots\ldots (H)$$

La fonction arbitraire de t, que nécessite cette intégration, peut être regardée comme comprise dans ϕ. On déterminera p et φ, et par suite u, v, v, en fonction de x,

y et z, à l'aide des équations (G) et (H) jointes à celle (E) de la continuité du fluide, qui pour les fluides incompressibles et homogènes est

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

545. Quoiqu'il puisse arriver qu'on sache tirer parti de l'équation (C) sans que χ y soit différentielle exacte, on voit cependant que la question se simplifie beaucoup alors. Il convient maintenant de chercher si la fonction χ est une différentielle exacte, sans qu'on soit obligé de la connoître en x, y, z, puisqu'elle n'est donnée qu'en u, v, v, dont la recherche fait partie du problême. Supposons que pour une valeur déterminée de t, χ jouisse en effet de la propriété ci-dessus; χ deviendra dans l'instant suivant $\chi+\frac{d\chi}{dt}dt$; or (C) donne

$$\frac{d\chi}{dt}=dq-\frac{dp}{D}-u.\frac{d\chi}{dx}-v.\frac{d\chi}{dy}-\text{v}.\frac{d\chi}{dz}$$

χ est supposé ici avoir la valeur qui répond au premier instant, et peut par conséquent être représenté par $d\phi$; les trois derniers termes sont donc..................

$$=-\tfrac{1}{2}d\left\{\frac{d\phi^2}{dx^2}+\frac{d\phi^2}{dy^2}+\frac{d\phi^2}{dz^2}\right\};\ \text{ainsi}\ \chi+\frac{d\chi}{dt}dt$$

est encore une différentielle exacte. Donc *si pour un instant déterminé χ est une différentielle exacte, il le sera aussi pour tous les instans suivans et ne le sera que dans ce cas.* Or, on connoît ordinairement l'état initial du fluide, il sera donc aisé de savoir, lorsque $t=0$, si χ jouit de la propriété dont il s'agit, ce qui servira à faire connoître si χ en jouit, quel que soit t. Lorsque $t=0$, si le fluide n'a aucune vîtesse, ou s'il n'a que celle que communique un piston, χ est une différentielle exacte puisque u, v et v sont, à cet instant, nuls ou constans dans tout le fluide. La même chose arrive lorsque les vîtesses u, v et v sont infiniment petites, quelles que soient d'ailleurs les circonstances initiales du mouvement; car en négligeant $\frac{d\varphi^2}{dx^2}$, $\frac{d\varphi^2}{dy^2}$, $\frac{d\varphi^2}{dz^2}$, on a encore $\frac{d\chi}{dt}$ une différentielle exacte.

346. Le fluide étant incompressible et homogène, cherchons les lois de l'écoulement par un orifice k pratiqué au vase $ABpq$ qui le contient, en admettant cependant l'hypothèse du parallélisme des tranches (323); prenons les z positifs sur la verticale Ck et de haut en bas, q sera $= gz$; les vîtesses u et v seront nulles, et v sera la vîtesse d'une tranche quelconque TV dont l'aire $= \xi$ et l'ordonnée $CQ = z$. Les équations (H) et (I ou F) deviennent, en supposant la densité $D = 1$, Fig. 138.

$$A + gz - p = \frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi^2}{dz^2}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = v.$$

Or, on a (comme p. 463) $kudt = \xi dz$ ou $ku = \xi v$, u étant la vîtesse du fluide à l'orifice et fonction de t seul: donc $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{ku}{\xi}$, d'où $\varphi = ku . \int \frac{dz}{\xi} + C$, et....
$\frac{d\varphi}{dt} = k \frac{du}{dt} \int \frac{dz}{\xi} + C'$; C et C' étant des fonctions de t dont l'une est arbitraire, et qu'on détermine comme il a été dit précédemment (p. 463). En substituant ces valeurs dans celle de p, on obtient visiblement (L) et par suite toutes les conséquences qui en résultent.

347. Lorsque le fluide n'a que de très-petits mouvemens on peut négliger les carrés des vîtesses u, v et v;

et comme l'équation (H) a lieu, elle se change en

$$q-\int\frac{dp}{D}=\frac{d\varphi}{dt}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(K).$$

C'est à cette équation qu'il faut rapporter le mouvement des ondes et le son; mais il faut employer en outre (E). Pour donner un exemple de l'usage de ces équations, cherchons le mouvement d'une ligne sonore horisontale; l'air est mu dans un tube dont la direction est celle des x: v et v sont nuls; il en est de même q, lorsqu'on fait abstraction de la gravité. Soit D' la densité de l'air dans l'état de repos; l'élasticité la changera en $D=D'(1+s)$, par l'effet du mouvement, s étant d'ailleurs très-petit: de plus, a^2 étant une constante, on a $\text{p}=a^2D$, d'où....
$\int\frac{d\text{p}}{D}=a^2.\log(1+s)$; (K) et (E) deviennent donc

$$\frac{d\varphi}{dt}=-a^2.\log(1+s),\quad\frac{ds}{dt}+(1+s)\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0,$$

en négligeant $u.\frac{ds}{dx}$ qui est du 2^e^. ordre. Divisons la seconde par $1+s$, et mettons pour $\frac{ds}{1+s}$ sa valeur $-\frac{1}{a^2}.d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ tirée de la première, nous aurons $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2.\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, dont l'intégrale a été trouvée p. 382.
Nous bornerons ici cette théorie, en renvoyant aux *Mémoires* de Lagrange et Laplace, et à la *Mécanique analytique*, p. 487 et 503; nous pensons que le peu que nous avons dit ici sur cette matière si délicate rendra plus facile l'intelligence de ces excellens ouvrages.

Fin de l'Hydrodynamique.

CALCUL DES VARIATIONS.

CET Ouvrage devant servir d'étude préliminaire aux traités de Mécanique transcendante, nous avons jugé utile de mettre à la portée des étudians le calcul des variations qui y est d'un usage important et général.

Les problêmes des *Isopérimètres* avoient déja été résolus par divers géomètres avant la découverte du calcul des variations : mais les procédés dont ils se servoient ne formoient pas un corps de doctrine, et chacun de ces problêmes n'étoit résolu que par une méthode qui lui étoit particulière, et par des artifices d'analyse souvent très-détournés. (*Voyez* pag. 280.) Il appartenoit au célèbre La Grange de ramener toutes les solutions à une méthode unique, à une marche uniforme. C'est sur-tout dans la Mécanique transcendante où elle joue un rôle important, et on peut même regarder cette science comme le triomphe de ce genre de considérations. Voici en quoi elle consiste.

Etant donnée une fonction Z de plusieurs variables $x, y \ldots\ldots$ on peut se proposer de la faire jouir de diverses propriétés (telle que d'être un *maximum*, ou toute autre), soit en assignant à ces variables des *valeurs numériques*, soit en établissant des relations entre ces variables et les *liant par des équations*. Soit, par exemple, $Z = F(x, y, y', y'' \ldots\ldots)$; les quantités $y', y'' \ldots\ldots$ désignent ici les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots$

ce qui suppose que x et y sont liés par une dépendance mutuelle, telle que $y = \varphi x$. Si cette équation est donnée, on en déduit y', y''... en fonction de x, et substituant, Z devient $= fx$. Parmi toutes les valeurs qu'on peut attribuer à x, on peut déterminer, par les règles connues du calcul différentiel, celles qui rendent fx un *maximum* ou un *minimum*. Mais si l'équation $y = \varphi x$ n'est point donnée, alors en prenant successivement pour φx différentes formes, la fonction $Z = fx$ prendra elle-même différentes expressions en x, et on peut se proposer d'assigner à φx une forme telle que Z soit plus grande ou plus petite que pour toute autre forme de φx, *quelle que soit d'ailleurs la valeur numérique de* x. Cette dernière espèce de problème appartient au calcul des variations. Il s'en faut de beaucoup qu'il se borne à la théorie des *maxima* et *minima*; mais nous nous contenterons de traiter cette matière, parce qu'elle suffit pour l'intelligence complette de ce calcul. N'oublions pas toutefois que dans ce qui va être dit *les variables* x *et* y *ne sont pas indépendantes*; mais seulement que l'équation $y = \varphi x$ qui les lie entre elles est inconnue; et qu'on ne la suppose donnée que pour faciliter la résolution du problême.

Mettons $x + i$ pour x, et $y + k$ pour y dans... $Z = F(x, y, y', y'' \ldots\ldots)$, Z deviendra

$$Z' = F(x + i, y + k, y' + k', y'' + k'' \ldots\ldots).$$

i et k sont deux fonctions de x, dont l'une est arbitraire, et dont l'autre en dépend en vertu de l'équation $y = \varphi x$: i', i''.... sont pris ici dans la même signification que y', y''.... D'après les principes connus, le théorême de Taylor ayant lieu (*Calcul. diff. élém.* de Lacroix, 121, 38), soit lorsque les quantités x, y, i, k...

sont dépendantes, soit lorsqu'elles sont indépendantes, on a

$$Z'=Z+\left\{i.\frac{dZ}{dx}+k.\frac{dZ}{dy}+k'.\frac{dZ}{dy'}+k''.\frac{dZ}{dy''}+\text{etc.}\right\}+\text{etc.}$$

De sorte qu'on peut regarder x, y, y', y''.... comme autant de variables indépendantes, en tant qu'il ne s'agit que de trouver ce développement.

Cela posé, la nature de la question exige que l'équation $y=\varphi x$ ait été déterminée de manière que, quelle que soit la valeur de x, on ait toujours $Z'>Z$, ou $Z'<Z$; en raisonnant comme dans la théorie des *maxima* et *minima* ordinaires, on voit qu'il faut que les termes du premier ordre soient nuls, et qu'on ait

$$i.\frac{dZ}{dx}+k.\frac{dZ}{dy}+k'.\frac{dZ}{dy'}+k''.\frac{dZ}{dy''}+\text{etc.}=0.$$

Comme l'une des deux quantités k et i est une fonction arbitraire de x, on peut supposer.............. $k=a+b(x-X)+\frac{1}{2}c(x-X)^2+\text{etc.}$, X, a, b, c... étant quelconques: or comme cette équation et ses différentielles doivent avoir lieu, quel que soit x, elles devront subsister lorsque $x=X$, ce qui donne $k=a$, $k'=b$, $k''=c$.... donc notre équation ne peut être satisfaite, vu l'indépendance de a, b, c,.... à moins que chaque terme ne soit nul. Ainsi elle se partage en autant d'autres qu'elle renferme de termes, et on a

$$\frac{dZ}{dx}=0,\ \frac{dZ}{dy}=0,\ \frac{dZ}{dy'}=0,\ \frac{dZ}{dy''}=0,\ldots\ \frac{dZ}{dy^{(n)}}=0,$$

(n) étant l'ordre le plus élevé de Z. Ces diverses équations devront s'accorder toutes entre elles, et subsister en même tems, quel que soit x : si cet accord a lieu, il y aura *maximum* ou *minimum*, et la relation qui en résultera entre y et x sera l'équation cherchée $y = \varphi x$, qui a la propriété de rendre Z plus grand ou plus petit que ne pourroit faire toute autre relation entre x et y. On distinguera le *maximum* du *minimum* suivant les théories ordinaires, d'après le signe des termes du 2e. ordre.

Mais si toutes ces équations donnent des relations différentes entre x et y, le problème sera impossible dans l'état de généralité qu'on lui a donné : et s'il arrive que quelques-unes seulement de ces équations s'accordent entre elles, alors la fonction Z aura des maxima et minima relatifs à quelques-unes des quantités x, y, y', y'',.... sans en avoir d'absolus et de communs à toutes ces quantités. Les équations qui s'accorderont entre elles donneront les relations qui établissent les maxima et minima relatifs. Et si on ne veut rendre X un *maximum* ou un *minimum* que par rapport à l'une des quantités x, y, y', y'',... comme alors il ne faudra satisfaire qu'à une équation, le problème sera toujours possible.

Il suit des considérations précédentes que 1°. les quantités x et y sont dépendantes l'une de l'autre, et que néanmoins on doit les faire varier comme si elles étoient indépendantes, puisque ce n'est qu'un procédé de calcul pour parvenir au résultat. 2°. Ces variations ne sont pas infiniment petites; et si on emploie le calcul différentiel pour les obtenir, ce n'est que comme un moyen expéditif d'avoir le second terme du développement, le seul qui soit ici nécessaire.

Appliquons ces notions générales à un exemple : prenons sur l'axe des x d'une courbe deux abscisses m et n, et menons des parallèles indéfinies à l'axe des y : soit $y = \varphi x$ l'équation de cette courbe; si en un point quelconque on mène une tangente, elle coupera nos parallèles en des points qui ont pour coordonnées $y+y'(m-x)$ et $y+y'(n-x)$. Si la forme de φ est donnée, tout est ici connu; mais si elle ne l'est point, on peut demander quelle est la courbe qui jouit de la propriété d'avoir pour chaque point de tangence le produit de ces deux ordonnées plus petit que pour toute autre courbe. On a ici

$$Z=(y+(m-x)y')(y+(n-x)y')$$

en cherchant $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{dZ}{dy}$ et $\frac{dZ}{dy'}$, il sera très-aisé de reçonnoître que les résultats égalés à zéro donnent des équations incompatibles entre elles, tant que m est différent de n (abstraction faite de $y=0$, qui donne l'axe des x); ainsi Z n'est pas susceptible de remplir les conditions de la question. Mais si $m=n$, on a $Z=(y+(m-x)y')^2$; d'où on tire trois équations auxquelles on satisfait à-la-fois en faisant $y+(m-x)y'=0$, ou $ydx+(m-x)dy=0$; en intégrant on a $y=C(m-x)$, équation d'une droite : cette relation rend visiblement Z un *minimum*; car Z est alors nul, et cette fonction est toujours positive.

La théorie que nous venons de donner n'est pas d'une grande étendue, et on ne la doit considérer ici que comme un développement préliminaire utile pour l'intelligence du problême beaucoup plus intéressant qui nous reste à résoudre. Il s'agit d'appliquer tous les raisonnemens précédens à une fonction de la forme $\int Z$: le signe $\int$ indique que la fonction Z est différentielle, et qu'après l'avoir intégrée entre des limites désignées, on veut la faire jouir des propriétés précédentes. La difficulté qui se rencontre ici vient donc de ce qu'il faut résoudre le problême sans faire l'intégration, car on voit assez qu'il est, en général, impossible de l'exécuter.

Au lieu de représenter par i et k les accroissemens des variables, nous emploierons le signe δ; de sorte que δx, δy, ... seront des fonctions quelconques de x, y, ... qui désigneront les accroissemens de ces variables. Pareillement dx devenant $d(x+\delta x)$ croîtra de $d\delta x$; d^2x croîtra de $d^2\delta x$, etc. Observons que les variations indiquées par le signe δ sont finies, et tout-à-fait indépendantes de celles que désigne la caractéristique d : les opérations auxquelles ces signes se rapportent étant pareillement indépendantes, l'ordre dans lequel on les exécutera doit être indifférent pour le résultat. De sorte que $\delta.dx$ et $d.\delta x$ sont deux choses identiques, aussi bien que $d^2\delta x$ et $\delta.d^2x$; .... et que $\int\delta U$ et $\delta\int U$.

Soit donc Z une fonction de x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, ... il s'agit d'établir des relations entre x, y et z de manière que $\int Z$ soit un *maximum* ou un *minimum entre des limites désignées*. Afin de rendre les calculs plus symétriques nous ne supposerons aucune différentielle constante : d'ailleurs nous n'introduisons ici que trois variables, parce qu'il sera aisé de généraliser les résultats, et que ce cas suffit pour entendre la théorie. Pour abréger, nous remplacerons dx, d^2x ..... dy, d^2y, ... etc. par $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, ... $y_{\prime}$, $y_{\prime\prime}$, etc.; de sorte que

$$Z = F(x, x_{\prime}, x_{\prime\prime}, \ldots y, y_{\prime}, y_{\prime\prime}, \ldots z, z_{\prime}, z_{\prime\prime} \ldots).$$

Cela posé; si x, y et z reçoivent des accroissemens arbitraires et finis δx, δy, δz, dx ou x' deviendra $d(x+\delta x) = dx + \delta dx = x_{\prime} + \delta x_{\prime}$: de même $x_{\prime\prime}$ croîtra de $\delta x_{\prime\prime}$, et ainsi des autres; de sorte qu'en développant Z' par le théorême de Taylor et intégrant, $\int Z$ deviendra

$$\int Z' = \int Z + \int \left\{ \frac{dZ}{dx}\delta x + \frac{dZ}{dy}\delta y + \frac{dZ}{dz}\delta z + \frac{dZ}{dx_{,}}\delta x_{,} + \frac{dZ}{dy_{,}}\delta y_{,} \right.$$

$$\left. + \frac{dZ}{dz_{,}}\delta z_{,} + \frac{dZ}{dx_{,,}}\delta x_{,,} + \frac{dZ}{dy_{,,}}\delta y_{,,} + \frac{dZ}{dz_{,,}}\delta z_{,,} + \ldots \right\} + \int \text{etc.}$$

et on observe que la condition du *maximum* et du *minimum* exige que l'intégrale des termes du premier ordre soit nulle entre les limites désignées, et cela *quels que soient* δx, δy et δz; ainsi qu'on l'a vu précédemment. Prenons la différentielle de Z en regardant x, $x_{,}$, $x_{,,}$, ... y, $y_{,}$, $y_{,,}$ ... etc. comme autant de variables indépendantes; nous aurons

$$dZ = Mdx + Ndx_{,} + Pdx_{,,} + \text{etc.} + mdy + \text{etc.} + \mu dz + \text{etc.}$$

M, N, ... m, n, ... μ, ν, ... étant les coefficiens des différences partielles de Z par rapport à x, $x_{,}$, ... y, $y_{,}$, ... z, $z_{,}$, ... traités comme autant de variables. Si on eût pratiqué cette différentiation absolument de la même manière en employant le signe δ, on auroit eu

$$\left.\begin{aligned} \delta Z = M\delta x + N\delta x_{,} + P\delta x_{,,} + Q\delta x_{,,,} + \text{etc.} \\ + m\delta y + n\delta y_{,} + p\delta y_{,,} + q\delta y_{,,,} + \text{etc.} \\ + \mu\delta z + \nu\delta z_{,} + \pi\delta z_{,,} + \rho\delta z_{,,,} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots (A).$$

Or, cette quantité est précisément celle qui est sous le signe $\int$ dans les termes du premier ordre de notre développement : ensorte que la condition du *maximum* ou du *minimum* demandée, est que $\int \delta Z = 0$, entre les limites designées, quelles que soient les variations δx, δy, δz. Observons qu'ici, comme précédemment, le calcul différentiel n'est employé que comme un moyen facile d'obtenir l'assemblage des termes qu'il faut égaler à zéro;

de sorte que les variations sont encore ici finies et quelconques. D'ailleurs dans chaque cas particulier, on obtiendra aisément la valeur δZ, c'est-à-dire les quantités M, N, ... m, n, ... qui composent l'équation (A) dont le nombre de termes est limité : il suffira de différentier Z en employant le signe δ, et regardant x, y, z; dx, dy, dz; ... comme autant de variables indépendantes.

La première ligne de l'équation (A) équivaut à

$$M\delta x + Nd.\delta x + Pd^2.\delta x + Qd^3.\delta x + \text{etc.}$$

M, N, ... contiennent des différentielles, de sorte que le défaut d'homogénéité n'est ici qu'apparent. Il s'agit maintenant d'intégrer : or, la suite du calcul fera voir qu'il est nécessaire de dégager du signe $\int$, autant que possible, les termes qui contiennent $d\delta$. Pour y parvenir on emploie la formule connue $\int XdY = XY - \int YdX$: de sorte qu'on obtient

$$\int Nd.\delta x = N\delta x - \int dN.\delta x$$
$$\int Pd^2.\delta x = Pd.\delta x - dP.\delta x + \int d^2P.\delta x$$
$$\int Qd^3.\delta x = Q.d^2.\delta x - dQ.d.\delta x + d^2Q.\delta x - \int d^3Q.\delta x.$$

En réunissant ces résultats, on a cette suite dont la loi est facile à saisir

$$\int(M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R\ldots)\delta x + (N - dP + d^2Q - d^3R\ldots)\delta x$$
$$+ (P - dQ + d^2R - \ldots)d\delta x + (Q - dR + \ldots)d^2.\delta x + (R - \ldots)d^3\delta x\ldots$$

L'intégrale de (A), ou $\int.\delta Z = 0$, devient donc

$$(B)\ldots\int\{M - dN + d^2P - \ldots)\delta x + (m - dn + d^2p\ldots)\delta y + (\mu - d\nu + \ldots)\delta z\} = 0$$

$$(C)\ldots\begin{cases}(N - dP + d^2Q\ldots)\delta x + (n - dp + d^2q\ldots)\delta y + (\nu - d\pi + \ldots)\delta z\\ + P - dQ + d^2R\ldots)d\delta x + (p - dq + d^2r\ldots)d.\delta y + (\pi - d\chi + \ldots)d.\delta z\\ + (Q - dR + \ldots)d^2.\delta x + \text{etc.}\ldots + C = 0\end{cases}$$

C est la constante arbitraire : de plus, nous avons coupé notre équation en deux, parce que les termes qui restent sous le signe $\int$ ne pouvant être intégrés à moins qu'on ne donne à δx, δy, δz des valeurs particulières, ce qui est contre l'hypothèse, $\int \delta Z$ ne peut devenir $= 0$, à moins que ces termes ne soient nuls à part : et même si la nature de la question n'établit entre δx, δy et δz, aucune relation, l'indépendance de ces variations donne

$$\left.\begin{array}{l} 0 = M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{etc.} \\ 0 = m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{etc.} \\ 0 = \mu - d\nu + d^2\pi - d^3\chi + d^4\rho - \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (D).$$

Ces équations entre x, y et z donnent les relations demandées (*); elles ne peuvent d'ailleurs exprimer des conditions distinctes, puisqu'elles détermineroient des valeurs numériques pour les variables : dans ce cas, la question seroit absurde.

Comme l'intégrale est effectuée et doit être prise entre les limites désignées, les termes qui restent se rapportent à ces limites, car l'équation (C) est devenue de la forme $C + L = 0$, L étant une fonction de x, y, z, δx, δy, δz,... Marquons d'un et de deux accens les valeurs numériques de ces variables à la première et à la seconde limite. Comme l'intégrale a dû être prise entre ces limites, il faut d'abord déterminer C, ce qui donne $L - L' = 0$. De plus, il faut completter l'intégrale, c'est-à-dire changer x, y, ... en x'', y'', ...; ce qui donne $L'' - L' = 0$. D'où on voit qu'il faut marquer les divers termesde L, qui composent l'équation (C), d'abord d'un, puis de deux

(*) En géométrie ces équations différentielles sont celles de la courbe ou de la surface cherchée.

accens; retrancher les résultats et égaler à zéro : de sorte que $L'' - L'$ ne renferme plus de variables, puisque x, δx, ... ont pris les valeurs x', $\delta x'$, ... x'', $\delta x''$. assignées par les limites de l'intégration. Il se présente maintenant trois cas.

1°. *Si les limites sont données et fixes* (*), c'est-à-dire si les valeurs extrêmes de x, y et z sont constantes, comme $\delta x'$, $d.\delta x'$, etc. $\delta x''$, $d.\delta x''$, etc., sont nuls, tous les termes de L' et L'' sont nuls, et l'équation (C) est satisfaite d'elle-même. Alors on détermine les constantes que l'intégration introduit dans les équations (D) par les conditions que comportent les limites.

2°. *Si les limites sont arbitraires et indépendantes*, alors chacun des coefficiens de (C) est nul en particulier, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

3°. *S'il existe des équations de conditions* pour les limites (**), c'est-à-dire si la nature de la question lie entre elles par des équations quelques-unes des quantités x', y', z', x'', y'', z'', on se servira des différentielles de ces équations pour obtenir plusieurs des variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, etc., en fonction des autres; en substituant dans $L'' - L' = 0$, ces variations se trouveront réduites au plus petit nombre possible : ces dernières

(*) Ce cas revient en géométrie à celui où on cherche une courbe qui, outre qu'elle doit jouir de la propriété de *maximùm* ou *minimum* demandée, doit encore passer par deux points donnés. Les équations (D) sont celles de la courbe cherchée; on détermine les constantes par la condition que cette courbe passe par les deux points donnés.

(**) Cela signifie en géométrie que la courbe cherchée doit être terminée à des points qui ne sont plus fixes, mais qui doivent être situés sur deux courbes ou surfaces données.

étant absolument indépendantes, l'équation se partagera en plusieurs autres, en égalant leurs coefficiens à zéro.

Au lieu de cette marche on peut prendre la suivante qui est infiniment plus élégante. Soient $u=0$, $u'=0$,... les équations de condition données; on multipliera leurs variations δu, $\delta u'$, ... par des indéterminées λ, λ', ...; ce qui donnera $\lambda\delta u+\lambda'\delta u'+\ldots$ Ajoutant cette somme à $L''-L'$, on aura $L''-L'+\lambda\delta u'+\lambda'\delta u'+\ldots=0$. On traitera toutes les variations $\delta x'$, $\delta x''$, ... comme indépendantes, et égalant leurs coefficiens à zéro, on éliminera entre ces équations les indéterminées λ, λ', ... On parviendra par ce calcul au même résultat que par la méthode précédente; car on n'a fait que des opérations permises, et on obtient ainsi le même nombre d'équations finales. (Ce calcul revient à la méthode d'élimination donnée dans l'algèbre de *Lacroix*.)

Il faut observer qu'on ne doit pas conclure de $u=0$, qu'aux limites on ait $du=0$, ...; ces conditions sont indépendantes, et peuvent fort bien ne pas co-exister. Si toutefois la chose avoit lieu ainsi (*), il faudroit regarder $du=0$, ... comme de nouvelles équations de condition, et outre le $\lambda\delta u$, il faudroit aussi comprendre $\lambda'\delta du$, ...

Nous n'avons rien dit ici du cas où l'une des limites est fixe et la seconde assujettie à certaines conditions, ou même tout-à-fait arbitraire, parce que cela rentre dans les trois cas précédens.

Il pourroit aussi arriver que la nature de la question assujettit les variations δx, δy et δz à de certaines conditions données par des équations $\iota=0$, $\iota'=0$, ...; et

---

(*) Cela signifieroit en géométrie que la courbe cherchée doit avoir à sa limite un contact d'un certain ordre avec la courbe ou la surface dont l'équation est $u=0$.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

deviennent donc ici $d\left(\frac{dx}{ds}\right)=0$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0$; d'où on conclut $dx=ads$, $dy=bds$ et $dz=cds$. En carrant ces trois équations, et ajoutant, on trouve $a^2+b^2+c^2=1$; ainsi ces équations sont compatibles entre elles, lorsqu'on détermine l'une des constantes a, b et c par cette condition. En divisant deux à deux nos équations nous avons $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{c}{a}$; d'où on tire

$$bx=ay+a'; \quad cx=az+b',$$

ce qui apprend que les projections de la ligne cherchée sont des droites; ainsi cette ligne est une droite elle-même.

Pour en déterminer la position, il faudroit connoître les cinq constantes a, b, c, a' et b'. S'il s'agit de trouver la plus courte distance entre deux points fixes A et C, donnés par leurs coordonnées x', y', z'; x'', y'', z''; il est clair qu'en assujettissant nos deux équations à être satisfaites lorsqu'on y substitue ces valeurs respectives pour x, y et z, on obtiendra quatre équations entre les constantes; ce qui résout le problème, puisqu'on a cinq équations, en y comprenant $a^2+b^2+c^2=1$. Fig. 139.

Supposons que la seconde limite soit un point fixe C dans le plan xy, et la première une courbe AB située aussi dans ce plan; soit $y'=fx'$ l'équation de AB; on en tire $\delta y'=A\delta x'$; en faisant les raisonnemens ci-dessus dans ce plan, on a pour la ligne cherchée AC une droite dont l'équation est

$$bdx=ady, \text{ ou } bx=ay+a'.$$

On trouve aisément $L=\frac{dx}{ds}.\delta x+\frac{dy}{ds}.\delta y$; et comme la seconde limite C est fixe, il suffit de combiner ensemble les équations $\delta y' = A\delta x'$, et $dx' . \delta x' + dy' . \delta y' = 0$. En éliminant $\delta y'$ on obtient $dx' + Ady' = 0$. On auroit pu aussi multiplier l'équation de condition $\delta y' - A\delta x' = 0$ par l'indéterminée λ, et ajouter à L', ce qui eût donné

$$\frac{dx'}{ds'}.\delta x' + \frac{dy'}{ds'}.\delta y' + \lambda\delta y' - \lambda A\delta x' = 0.$$

Equation qui se décompose en deux autres $\frac{dx'}{ds'} - \lambda A = 0$, $\frac{dy'}{ds'} + \lambda = 0$. Eliminant λ, on obtient de même $dx' + Ady' = 0$. Cette équation comparée à celle $bdx' = ady'$, transforme celle de notre droite AC en $dx = Ady$, qui donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{A}$, et fait voir qu'elle est normale à la courbe proposée AB. La constante a' se détermine par la considération de la seconde limite.

Il seroit facile d'appliquer le raisonnement précédent aux trois dimensions, on parviendroit à la même conséquence : on peut donc conclure qu'en général la plus Fig. 140. courte distance AC entre deux courbes AB, CD, est la droite qui leur est normale.

Si la plus courte ligne demandée devoit être tracée sur une surface courbe, dont $u = 0$ seroit l'équation, alors l'équation (D) ne se décomposeroit plus en trois : à moins qu'on n'y ajoutât le terme $\lambda\delta u$; alors on pourroit regarder δx, δy et δz comme indépendans, et on trouveroit les relations

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \lambda\left(\frac{du}{dx}\right) = 0; d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \lambda\left(\frac{du}{dy}\right) = 0, d\left(\frac{dz}{ds}\right) + \lambda\left(\frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Eliminant λ, on a les deux équations

$$\frac{du}{dz}d\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{du}{dx}d\left(\frac{dz}{ds}\right),\quad \frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

qui sont celles de la courbe cherchée.

Prenons la sphère pour exemple; l'origine étant au centre, on a

$$u=x^2+y^2+z^2-r^2=0,\ \frac{du}{dx}=2x,\ \frac{du}{dy}=2y,\ \frac{du}{dz}=2z.$$

Nos équations deviennent en prenant ds constant

$$zd^2x=xd^2z,\ zd^2y=yd^2z,\ \text{d'où}\ yd^2x=xd^2y.$$

Intégrant, on a $zdx-xdz=ads$, $zdy-ydz=bds$, $ydx-xdy=cds$. En multipliant la première de ces équations par $-y$, la seconde par x, la troisième par z, et ajoutant, on trouve $ay-bx-cz=0$, qui est l'équation d'un plan qui passe par l'origine des coordonnées. Ainsi la courbe cherchée est le grand cercle qui passe par les deux points donnés, ou qui est normal aux deux courbes qui servent de limites et sont données sur la surface sphérique.

II. Prenons pour second exemple la *Brachystochrone*.

Nous avons vu (193, r') que le tems qu'un corps pesant met à parcourir l'arc s est $\int\frac{ds}{\sqrt{(2g(z-h))}}$, les z étant verticaux : on a donc ici $Z=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{(z-h)}}$ abstraction faite de la constante $2g$, qui disparoît lorsqu'on égale à zéro. On formera δZ et on aura

$$\mu=-\tfrac{1}{2}.\frac{ds}{(z-h)^{\frac{3}{2}}},\ N=\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}},\ n=\frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}},\ \nu=\frac{dz}{ds\sqrt{(z-h)}};$$

les autres quantités $M, m, P, Q, p\ldots$ sont nulles.

Les équations (D) deviennent donc

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0,\ d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0\ldots\ldots(1).$$

Nous omettons ici la troisième, qu'on peut démontrer comprise dans les deux autres : condition sans laquelle le problème proposé seroit absurde. En intégrant et divisant l'un par l'autre les résultats, on obtient $dy=adx$, ce qui prouve que la projection de la courbe sur le plan xy est une droite, et que par conséquent cette courbe est décrite dans un plan vertical. Prenons, pour abréger, ce plan pour celui des xz ; la première des valeurs (1) suffira, et nous aurons $dx=Cds\sqrt{(z-h)}$; et comme $ds^2=dx^2+dz^2$, on trouve l'équation de la cycloïde, en faisant $z-h=z'$. (*Voy.* p. 282.)

Fig. 140. Si les limites sont deux points fixes A et C, il n'y a aucune autre condition à remplir si ce n'est de faire passer la cycloïde AC par ces deux points ; ce qui détermine les valeurs des constantes.

Si la seconde limite est un point fixe C', et si la première est une courbe AB située, ainsi que le point fixe, dans un plan vertical ; en prenant ce plan pour celui des xz, on a $y=0$, et on en déduit

$$L=\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}.\delta x+\frac{dz}{ds\sqrt{(z-h)}}.\delta z.$$

Comme on a $\delta x''=0$, $\delta z''=0$, il suffit de rendre L' nul, en ayant égard à la première limite, qui est une courbe AB dont $x'=fz'$ est l'équation donnée. On en déduit $\delta x'-A\delta z'=0$; multipliant par λ, ajoutant à L', on trouve les deux équations

$$\frac{dx'}{ds'\sqrt{(z'-h)}}+\lambda=0,\ \frac{dz'}{ds'\sqrt{(z'-h)}}-A\lambda=0.$$

En éliminant λ, on obtient $dz' + Adx' = 0$. Il est visible maintenant que la cycloïde devra couper à angle droit la courbe donnée AB; la constante C sera déterminée en comparant l'équation de la cycloïde à la précédente. On trouveroit dans les trois dimensions la même conséquence, de sorte que la courbe de plus vîte descente d'une courbe quelconque CD à une autre AB, est une cycloïde $A'C'$ Fig. 140. normale à ces deux dernières. La même chose auroit aussi lieu pour deux surfaces courbes, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

Si la Brachystochrone devoit être tracée sur une surface courbe donnée par son équation $u = 0$, l'équation (B) ne se partageroit en trois autres qu'après avoir ajouté $\lambda . \delta u$, ce qui donneroit au lieu des équations (1) trois équations entre lesquelles éliminant λ, on auroit les équations de la Brachystochrone cherchée. Si on avoit pour limites deux points fixes, les constantes seroient déterminées par la condition que la courbe passât par ces deux points : lorsqu'on a pour limites deux courbes, celle qu'on cherche doit les couper à angle droit comme ci-dessus. Ainsi le reste du problême est le même dans les deux cas.

III. *Principe de la moindre action.*

Nous avons vu (d', p. 226) que lorsqu'un point matériel décrit une courbe, soit librement et en vertu des forces qui l'animent, soit en parcourant une surface sur laquelle il est assujetti à rester, on a pour la valeur de sa vitesse v, lorsque X, Y et Z sont indépendantes de t, $v^2 = A + 2\chi$. Nous allons prouver que $\int v ds$ est un *minimum* ou *maximum*, entre le point de départ et le point d'arrivée; c'est-à-dire que $\delta \int v ds = 0$, ou que

$$\int (v\delta . ds + ds . \delta v) = 0.$$

Pour le démontrer, formons la quantité $\int (v\delta . ds + ds . \delta v)$.

1°. On a $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; différentiant par δ, il vient (à cause de $ds = vdt$)

$$v\,\delta.ds = \frac{dx}{dt}.\delta dx + \frac{dy}{dt}.\delta dy + \frac{dz}{dt}.\delta dz.$$

Intégrons et dégageons les termes affectés de δd, à l'aide de l'intégration par parties. En omettant les termes intégrés $\frac{dx}{dt}.\delta x + \frac{dy}{dt}.\delta y + \frac{dz}{dt}.\delta z$ qui se rapportent aux limites, et qui sont nuls, puisqu'il s'agit de deux points fixes, on a

$$\int v\delta.ds = -\int\left\{d\left(\frac{dx}{dt}\right).\delta x + d\left(\frac{dy}{dt}\right).\delta y + d\left(\frac{dz}{dt}\right).\delta z\right\}.$$

2°. L'équation (e') différentiée, donne en changeant d en δ, $v\delta v = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$; or $vdt = ds$, donc en intégrant

$$\int ds\,\delta v = \int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dt.$$

Réunissant ces deux résultats, $\int(v\,\delta.ds + ds.\delta v)$ devient

$$\int\left\{\left(Xdt - d\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)\delta x + \left(Ydt - d\left(\frac{dy}{dt}\right)\right)\delta y + \left(Zdt - d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right)\delta z\right\}$$

Or cette expression est nulle, 1°. lorsque le mobile se meut librement, puisque chaque terme est nul en particulier, d'après les équations (b', p. 224); 2°. quand le mobile est assujetti à décrire une surface, puisque ces mêmes équations ont encore lieu, pourvu qu'on exprime que les variations δx, δy et δz ont entre elles une relation que l'équation de la surface donne; ainsi on a en général $\delta\int vds = 0$; c'est en cela que consiste le *principe de la moindre action.* Ce même principe a également lieu lorsqu'il s'agit d'un systême de corps, mais il n'est pas de notre objet de nous en occuper. Il nous suffira de faire remarquer que lorsque le mobile décrit une surface, sans qu'aucune force accélératrice agisse sur lui, la vîtesse v étant constante, on a $v\int ds$ ou vs qui est un *minimum* entre les limites désignées : ce qui veut dire que le mobile décrit l'arc de courbe le plus court qu'on puisse tracer sur la surface, du point de départ au point d'arrivée.

Fin du Calcul des Variations.

SUR QUELQUES VALEURS NUMÉRIQUES

EMPLOYÉES EN MÉCANIQUE.

On fait fréquemment usage, dans les problêmes de Mécanique, des valeurs numériques de certaines constantes; nous allons les réunir ici avec le plus grand degré d'approximation. Nous désignerons par le signe log., ainsi qu'on l'a fait précédemment, les *logarithmes hyperboliques*, que Lacroix a nommés avec plus de raison *logarithmes Népériens*; et par L les logarithmes des tables ordinaires, qu'on nomme aussi *logarithmes de Briggs*, dans lesquels la base est 10.

1°. La base des logarithmes népériens est

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536.$$

Comme les formules ordinairement employées en algèbre renferment les logarithmes népériens, parce qu'ils sont d'un usage plus commode dans le calcul intégral; et comme il n'y a que des tables peu étendues construites pour ce systême, on doit se rappeler que pour convertir les logarithmes népérienss en logarithmes tabulaires, il suffit de multiplier ceux-là (*Compl. d'alg.* de Lacroix, n°. 92) par

$$M = Le = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 827651\ 11289.$$

C'est ce nombre qu'on nomme le *Module*; et on a

$$LM = \bar{1}{,}6377843113.$$

Nous indiquons ici par $\overline{1}$ que la caractéristique est négative et $= -1$, de sorte que c'est comme si on avoit $LM = 0,637\ldots\ldots -1$. Ainsi lorsqu'une formule contient log. a; pour employer les tables de Briggs, il faut la préparer et remplacer log. a par $\frac{M.\log. a}{M} = \frac{La}{M}$. De même aussi lorsqu'on veut ramener les logarithmes de Briggs aux logarithmes népériens, il faut multiplier les premiers par

$$f = 2,30258\ 50929\ 94045\ 6840\ 179914:$$

de sorte que $La = \frac{f.La}{f} = \frac{\log. a}{f}$. On a d'ailleurs

$$Lf = 0,3622156886.$$

2°. On a pour le *rapport du diamètre à la circonférence* ou la demi-circonférence du cercle qui a l'unité pour rayon

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279,$$
$$L\pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 127,$$
$$\log \pi = 1,14472\ 98858\ 49400\ 17414\ 342.$$

3°. En désignant par g la GRAVITÉ, et par r la longueur du PENDULE simple qui, à Paris, bat les secondes dans le vide, on a

$$\left.\begin{array}{l} g = 9^{m},80879\ 5248 \\ Lg = 0\ ,99161\ 56690 \\ r = 0^{m},99383\ 87446 \\ Lr = \overline{1}\ ,99731\ 59236 \end{array}\right\}$$

Dans l'ancienne division du tems, où la seconde est la 86 400^{e}. partie du jour moyen.

(*Voy*. le Mémoire de PRONY, sur le *jaugeago des eaux courantes*, pag. 63.)

$g = 7^m,32214$
$Lg = 0\ ,8646381$
$r = 0^m,741887$
$Lr = \bar{1}\ ,8703378$

Dans la nouvelle division du tems, où la seconde est la 100 000^e. partie du jour moyen.

(*Exposition du Système du monde*, pag. 146).

4°. Le quart du méridien a été trouvé d'une longueur égale à 5130740 toises; la dix-millionième partie est l'unité de longueur, ainsi

Le mètre est $= 0^t,513074 = 3$ pieds 11 lignes.

Réciproquement

1 toise $= 1^m,949036$ et 1 pied $= 0^m,3248394$.

Nous mettrons ici les logarithmes de ces nombres

$$L\,1^{\text{mètre}} = L\,0^t,513074 = \bar{1},7101800,$$
$$L\,1^{\text{mètre}} = L\,3^{pi},07844 = 0,4883314,$$
$$L\,1^{\text{toise}} = L\,1^m,949036 = 0,2898198,$$
$$L\,1^{\text{pied}} = L\,0^m,3248394 = \bar{1},5116687.$$

5°. L'air et tous les gaz, lorsqu'ils sont secs, se dilatent du 250^e. de leur volume pour chaque degré du thermomètre centigrade : ou, plus exactement, pour un nombre x de degrés, le volume d'air à zéro étant $= 1$, on a $1 + 0,00375.x$ pour ce volume dilaté : la pression atmosphérique étant supposée 76 centimètres.

Fin des Valeurs numériques.

TABLE

CONTENANT LES PESANTEURS SPÉCIFIQUES DE DIFFÉRENTES SUBSTANCES.

1°. *Métaux.*

Platine pur	20,722
Or pur	19,258
Or (de Paris) à 22$^{\text{kar.}}$	17,486
Argent pur	10,704
Argent (de Paris) à 11$^{\text{d.}}$ 10$^{\text{gr.}}$	10,175
Mercure	13,586
Plomb	11,352
Bismuth	9,076
Cuivre	8,876
Laiton	8,395
Fer	7,800
Acier	7,767
Etain	7,224
Zinc	6,862
Antimoine	6,702
Arsenic	5,765
Cinabre rouge	6,902

2°. *Pierres précieuses.*

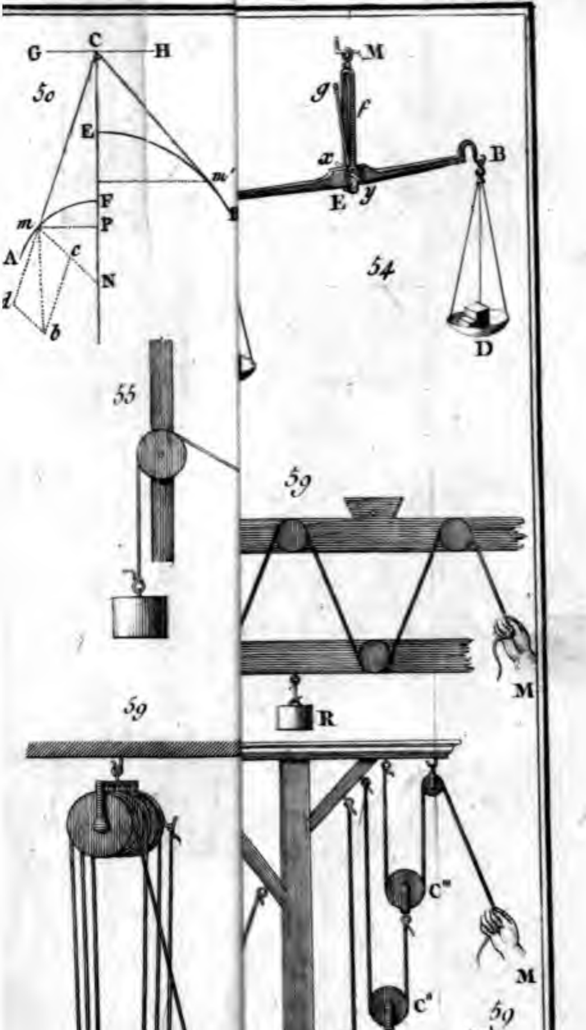
Diamant oriental blanc	3,521
Rubis oriental	4,283
Topaze orientale	4,010

3°. *Pierres siliceuses.*

Cristal de roche	2,653
Quartz cristallisé	2,654
Grès de paveurs	2,415
Agate orientale	2,590
Agate onix	2,637
Calcédoine	2,615
Cornaline	2,613
Pierre à fusil blonde	2,594
Pierre à fusil noirâtre	2,581
Jaspe vert clair	2,358
Jaspe brun	2,691

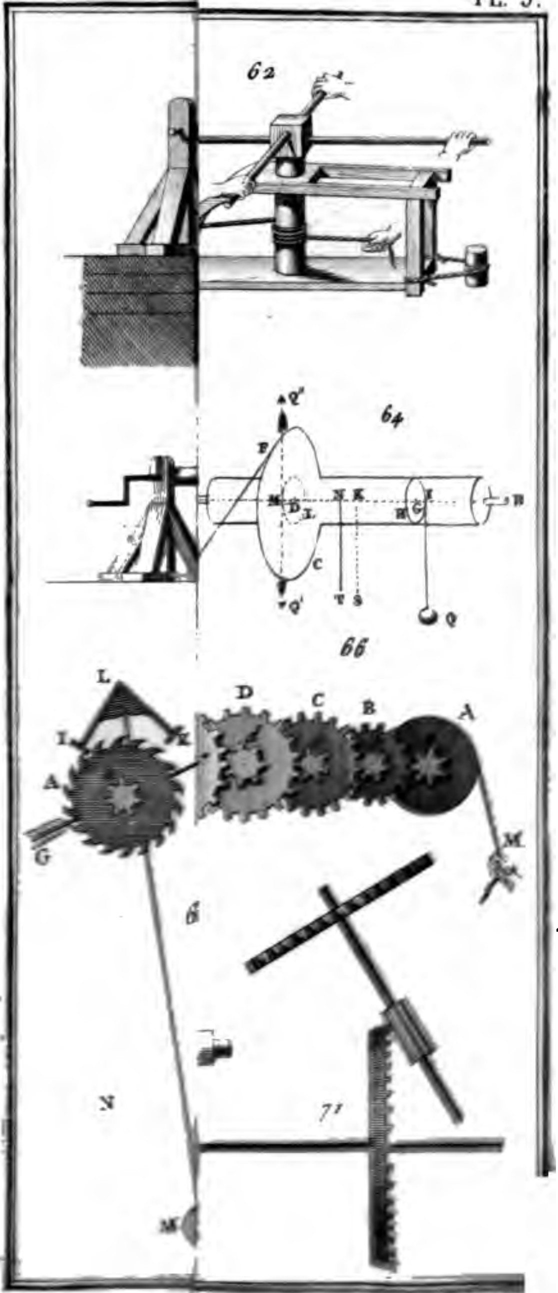
4°. *Pierres diverses.*

Albatre oriental blanc antique	2,730
Marbre de Carrare	2,716
Id. dit brèche d'Alep	2,686
Pierre de St.-Leu	1,659
Pierre de liais	2,077
Spath pesant	4,440
Spath fluor	2,500
Granit rouge du Dauphiné	2,643
Pierre ponce	0,914
Porcelaine de Sèvres	2,145
Soufre natif	2,033
Soufre fondu	1,990
Craie	{ 2,250 2,320
Gypse compacte	{ 1,870 2,290
Verre blanc	2,430

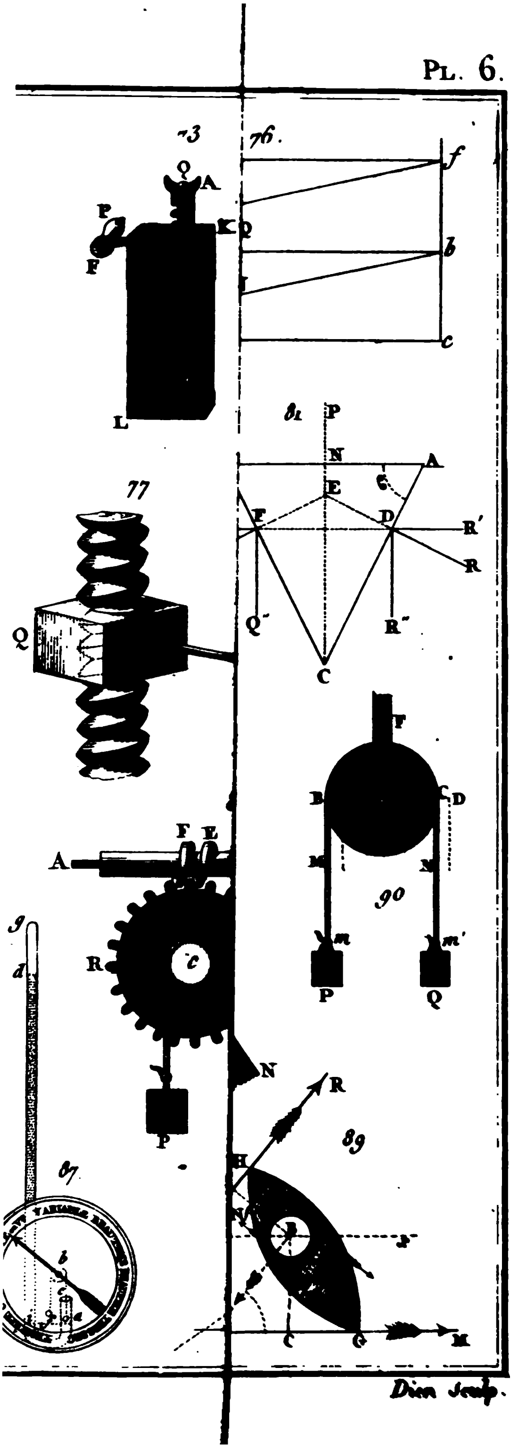


Dien Sculp.

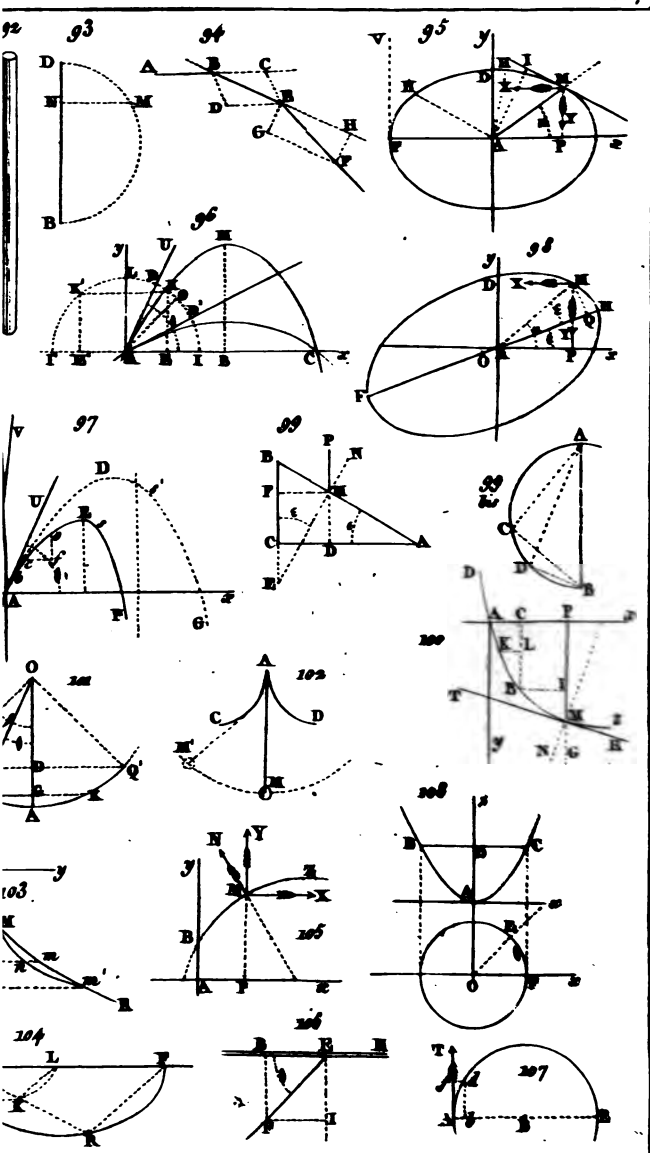
2


62
64
Q'
F
M
D
L
N
K
H
G
I
B
C
T
S
Q
66
L
I
K
A
D
C
B
A
G
M
N
M
71

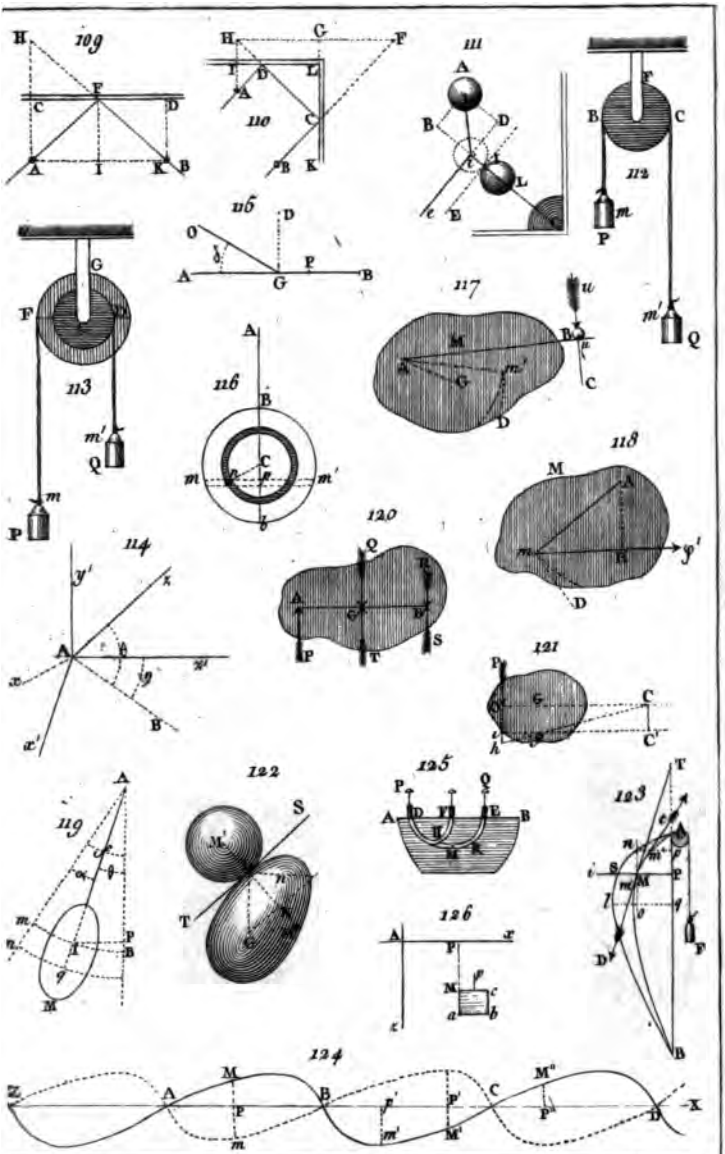
Pl. 6.



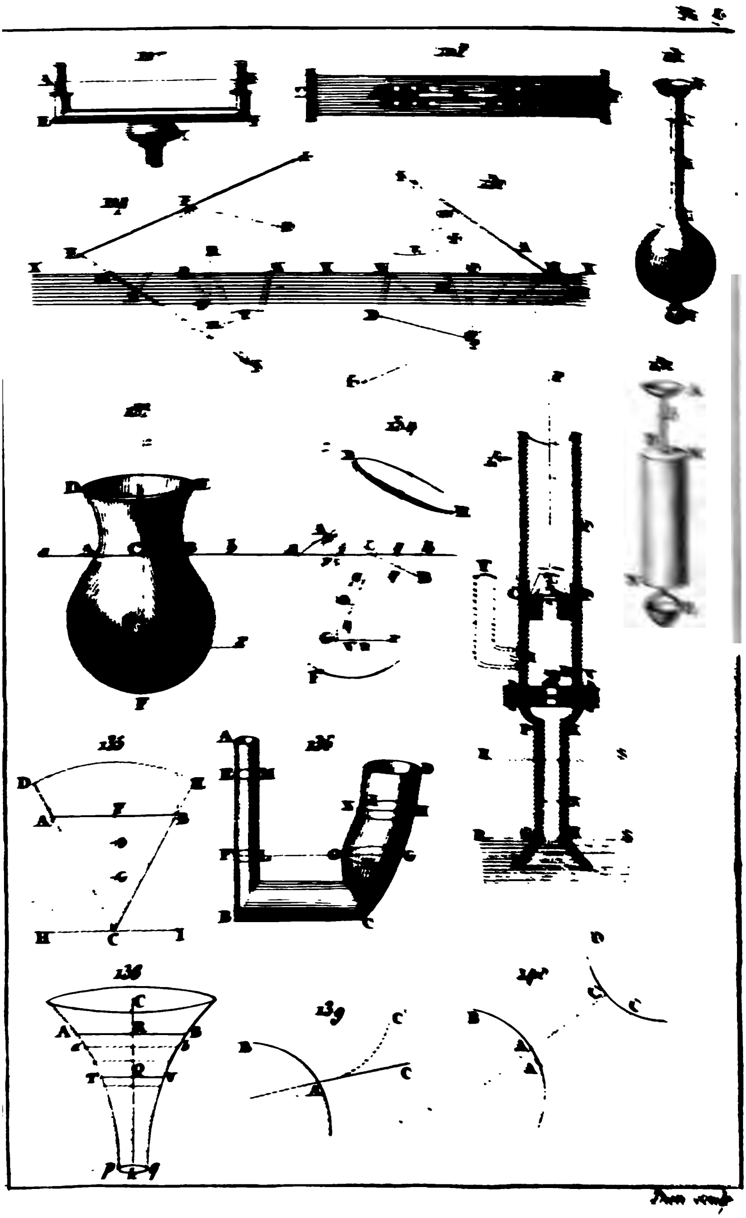
Dien sculp.

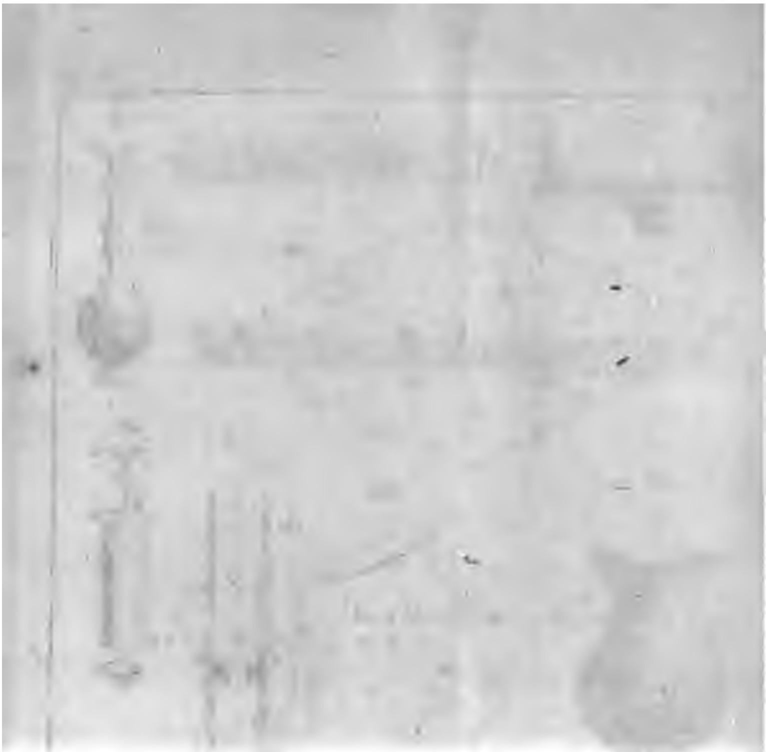


Dien sculp.


109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126

Dien sculp.





OTICE ABRÉGÉE

DES PRINCIPAUX LIVRES

Bernard, Libraire de l'Ecole impériale Polytechnique, éditeur des Annales de Chimie, Libraire de l'Ecole impériale des Ponts et Chaussées, quai des Augustins, N°. 25, porte cochère près la rue Gît-le-Cœur, au premier, à droite.

Janvier 1807.

Les lettres *non affranchies* ne me parviennent pas.

JOURNAUX.

OURNAL DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, par MM. Lagrange, Laplace, Monge, Prony, Fourcroy, Berthollet, Vauquelin, Lacroix, Hachette, Poisson, Gay de Vernon, Sganzin, Guyton, Barruel, Legendre, Haüy.

a Collection du Journal polytechnique, jusqu'à la fin de 1806, contient dix cahiers in-4, avec des tableaux et des planches.

Elle comprend les 1^er^, 2^e^, 3^e^, 4^e^, 5^e^, 6^e^, 7^e^ et 8^e^, 11^e^, 12^e^ et 13^e^ cahiers. Le prix de cette collection est, pour Paris, de 48 fr.

e prix de chaque cahier, vendu séparément, sera, pour les 2^e^, 3^e^, 4^e^, 5^e^ et 6^e^, pour Paris, de 5 fr.

our les 7^e^, 8^e^, 11^e^, 12^e^ et 13^e^, prix de chaque cahier, vendu séparément, sera, pour Paris, de 6 fr.

e *premier* est rare ; on ne le vendra qu'avec la collection.

es 9^e^ *et* 10^e^ cahiers, qui forment la suite de la mécanique philosophique, par M. Prony, est sous presse, ainsi que le 14^e^ cahier.

a Théorie des fonctions analytiques, par M. Lagrange, in-4, pour Paris, 4 f.

orrespondance sur l'école polytechnique, six numéros, in-8, 5 fr.

rogramme du cours de géométrie descriptive appliquée à l'art de l'ingénieur des ponts et chaussées, par M. Sganzin, professeur à l'école polytechnique, inspecteur général des ponts et chaussées, 1 vol. in-4, 3 pl. 5 fr.

rogramme du cours de mécanique, par M. Prony.

Programme des connoissances exigées pour l'admission à l'école polytechnique.

1°. L'arithmétique et l'exposition du nouveau système métrique ;

2°. L'algèbre, comprenant la résolution des équations des deux premiers degrés, celles des équations indéterminées du premier degré ; la composition générale des équations ; la démonstration de la formule du *binome de Newton*, dans le cas seulement des exposans entiers positifs ; la méthode des diviseurs commensurables, la résolution des équations numériques par approximation, et l'élimination des inconnues dans deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues ;

3°. La théorie des proportions, des progressio[illegible] celle des logarithmes, et l'usage des tables ;

4°. La géométrie élémentaire ; la [illegible] s des tables de sinus ;

5°. La discussion complète des lignes représentées par les équations du premier et deuxième degrés à deux inconnues; les propriétés principales des sections coniques;

6°. La statique appliquée principalement à l'équilibre des machines simples;

7°. Les candidats seront tenus d'écrire lisiblement, sous la dictée de l'examinateur, plusieurs phrases françaises, et d'en faire l'analyse grammaticale;

8°. Ils seront tenus de copier une tête d'après l'un des dessins présentés par l'examinateur; et ils seront en état d'expliquer les *Offices* de *Ciceron*.

Livres nécessaires pour la première année.

Calcul différentiel intégral, de Lacroix, in-8.
Analyse appliquée à la géométrie, de Monge et Hachette (1^{re} partie) in-4.
Mécanique de Francœur, in 8.
Géométrie descriptive de Monge, in-4.
Philosophie chimique de Fourcroy.
Tableaux synoptiques de chimie, de Fourcroy.
Tables de Callet.
Complément d'algèbre, de Lacroix, in-8.
Précis des leçons sur le calorique et l'électricité, par Monge et Hachette, in 8.
Correspondance sur l'école polytechnique (*ad libitum*), in-8.

Pour la deuxième année.

Analyse appliquée à la géométrie, de Monge (2^{e} partie).
Ecoulement des fluides et poussée des terres, par Prony.
Système du monde, par Hassenfratz, in-8.
Optique de Lacaille.
Architecture de Durand, 2 vol. in-4.
Cours de fortifications de Gayvernon, 2 vol. in-4.
Programme du cours de l'ingénieur des ponts et chaussées, par Sganzin, in-4.
Programme du cours de mécanique, par Prony.

La seconde *table*, qui comprend les matières depuis le trentième volume jusqu'au soixantième volume inclusivement, paroîtra le 30 mai 1807 : elle sera 6 fr. pour Paris, et de 8 fr., franc de port, pour les départemens.

Il paroît, par an, douze cahiers de sept à huit feuilles d'impression, qui forment quatre volumes tous les ans, avec des gravures quand le sujet l'exige. Le premier numéro se distribue le 30 janvier; et le *douzième*, le 30 décembre. Le prix de la souscription est de 18 *francs* pour Paris; il est franc de port, de [illegible] *francs*, pour les départemens, et de 24 *francs* pour l'étranger.

On fournit tous les vol. de la collection séparément, à 4 *f.* 50 *cent.*, pour Paris.

On ne reçoit pas les abonnemens de six mois. On peut envoyer les fonds par les directeurs des Postes.

Le Journal de la Société des Pharmaciens de Paris, publié pendant les années V, VI, VII, par des coopérateurs des *Annales*, 1 vol. in-4°, sert d'introduction à la collection des Annales de Chimie. Pour Paris, 12 fr.

ANNALES DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES, 4 vol. in-4. par année, avec des planches. Le premier volume paroîtra en l'an 1807; le prix sera fixé quand on annoncera le premier volume : on le met sous presse. Ce dépôt précieux à l'architecture civile et hydraulique, sera destiné à rassembler une foule de mémoires inédits, ou épuisés, de tous les ingénieurs français et étrangers, qui intéressent les progrès de l'art et la gloire des ingénieurs.

CHIMIE ET PHYSIQUE.

MANUEL D'UN COURS DE CHIMIE, ou Principes élémentaires, théoriques et pratiques de cette science, 3 vol. in-8°., avec 7 tableaux et 23 planches, qui contiennent la description détaillée d'un laboratoire, des instrumens, des appareils chimiques. On y trouve l'histoire de la Chimie, les découvertes modernes jusqu'à ce jour, et la série des expériences faites à l'École Polytechnique; par *Bouillon-Lagrange*, docteur en médecine, professeur de physique, coopérateur des Annales, *troisième édition*. Pour Paris, 18 fr.

TABLEAU des propriétés physiques et chimiques des corps, par le même, in-fol. 1 fr.

MANUEL DU PHARMACIEN, par M. *Bouillon-Lagrange*, in-8°. avec neuf planches. Pour Paris, 6 fr.

Cet ouvrage est très-utile à tous ceux qui se livrent à l'art de guérir. Il est divisé en quatre parties. L'Auteur a rassemblé dans ce Livre tous les nouveaux médicamens adoptés dont les Pharmacopées ne font aucune mention; il a rectifié ou simplifié les procédés décrits dans les divers Dispensaires; enfin il a donné les nouveaux poids en parallèle avec les anciens.

TRAITÉ DES MOYENS DE DÉSINFECTER L'AIR, de prévenir la contagion, et d'en arrêter les progrès, avec des additions considérables sur la fièvre jaune; par M. *Guyton-Morveau*, membre de l'Institut national, *troisième édition*, 1 vol. in-8°., avec trois planches. Pour Paris, 4 fr. 50 c.

Cette découverte, dont l'expérience a démontré l'utilité incontestable, est une de celles qui honorent le plus la Chimie moderne : un rapport solennel du 28 juillet 1802 a publié l'hommage de la reconnoissance nationale envers M. Guyton, comme premier et seul auteur de cette découverte importante en Europe. Les épidémies de Gênes, de Nice, de Séville, de Cadix, de Grenoble, de Commerce, d'Amérique, de Livourne, n'ont cédé qu'aux moyens préservatifs désignés dans ce Traité. Leur efficacité contre la propagation de la fièvre jaune, a été constatée en 1805 de la manière la plus authentique au Lazaret de Marseille.

Cet ouvrage est utile aux pères de famille, aux instituteurs, aux lycées, aux hospices, dans les casernes, aux prisons, aux Lazarets, dans les chambres des malades, aux navigateurs, aux habitans des pays marécageux, dans les salles de spectacles, dans les ateliers, dans les salles de vers à soie, dans toutes les maladies épidémiques, dans toutes les grandes réunions d'êtres vivans.

M. *Dumotiez*, ingénieur en instrumens de physique, rue du Jardinet, n° 12, division du Théâtre français, et M. *Boulay*, pharmacien, rue des Fossés-Montmartre, n°. 55, tiennent des flacons portatifs, et les nouveaux appareils permanens de désinfection.

RECHERCHES CHIMIQUES ET MICROSCOPIQUES sur un nouvel ordre de plantes-polipiers, les bisses, les tremelles et les conferves, par *Girod-Chantrans*, in-4°. 36 pl. enlum. 15 fr.

Cette découverte a fixé l'attention de tous les naturalistes. (Voyez le rapport fait à l'Inst. nat., par Ventenat).

Les exemplaires sur papier de Hollande sont de 25 francs pour Paris.

MANUEL DE L'ESSAYEUR, par M. *Vauquelin*, in-4°. 2 fr. 50 c.

« Le nom de l'auteur est le garant du mérite de l'Ouvrage ; la minéralogie et la chimie doivent à ce savant une foule de découvertes ».

EXPÉRIENCES NOUVELLES ET OBSERVATIONS SUR LES DIFFÉRENS ALLIAGES DE L'OR, leur pesanteur spécifique et leurs propriétés comparées par rapport au frai comme monnoie, par *Hatchett*, membre de la Société royale de Londres, traduit de l'anglais, par M. *Lerat*, contrôleur du monnoyage à Paris, 1 vol. in-4°. pl. ; avec une table du rapport des poids et mesures anglais avec ceux de France, et des notes de M. *Guyton-Morveau*. Pour Paris, 9 fr.

« Ces expériences ont été regardées comme si importantes, que le gouvernement anglais a nommé une commission des principaux membres de l'Etat pour en constater l'authenticité à tous les savans et à tous les gouvernemens de l'Europe. Ce livre fera époque dans l'histoire de la Métallurgie. Il est nécessaire à tous les directeurs, essayeurs et contrôleurs des monnoies ; aux orfèvres et travailleurs en métaux ».

THÉORIES DES VENTS ET DES ONDES, in-8. Pour Paris, 3 fr.

PHILOSOPHIE CHIMIQUE, ou Vérités fondamentales de la Chimie moderne, par M. Fourcroy, 1 vol., troisième édition. 4 fr.

Tableaux synoptiques de chimie, du même, in-fol. 9 fr.

Système des connoissances chimiques, 11 vol. in-8°., du même. 60 fr.

Élémens de Statique chimique, de M. Berthollet, 2 vol. in-8°. 12 fr.

Élémens de l'Art de Teinture, du même, deuxième édition. 12 fr.

Recherches sur les Lois de l'Affinité chimique, du même, in-8.

... de Chimie ; Lavoisier, 3 vol. in-8°.

... ; Chaptal, 3 vol. in-8°.

…té des Affinités chimiques ; Bergmann, in-8.
…ns de Chimie pour perfectionner la physique, in-4°., rel.
…res de Schoeffer, 8 vol.
…ueil et Procédés sur la Teinture ; Dambourney, in-4° et in-8°.
…ueil des Termes de Minéralogie ; Gallizin, in-fol. 30 fr.
…s minéralogique de France, in-fol.
…cture des Cristaux ; Haüy, in-8°.
…néralogie de Vallerius, 2 vol. in-8.
…tionnaire allemand des Mines, in-8°.
…nuel du Minéralogiste ; Mongez, 2 vol. in-8°.
…néralogie, par Bomare, 2 vol. in-8°.
…s anciens Minéralogistes de France ; Gobet, 2 vol. in-8°.
…rystallographie ; Romé-Delille, 4 vol. in-8°.
…inéralogie d'Haüy, 4 vol. et atlas.
… la Fonte des Mines et des Fonderies ; Hellot, 2 vol. in-4.

Physique.

…HYSIQUE MÉCANIQUE, de *E. G. Fischer*, professeur de physique, de mathématiques et de chimie à Berlin, trad. de l'allemand, avec des notes de M. *Biot*, membre de l'Institut, 1 vol. in-8., avec 8 pl., pour Paris, 6 fr.

» L'opinion générale étant fixée parmi tous les hommes éclairés de l'Europe, dit un physicien célèbre que la France a perdu, on peut regarder ce livre comme un des meilleurs livres élémentaires ; il est un modèle en ce genre pour le plan, la clarté, la méthode, la précision : les sciences ont fait enfin dans notre patrie une excellente acquisition par la traduction et les notes qui l'accompagnent. La plupart des professeurs en font le texte de leurs leçons en Allemagne, où il y en a eu trois éditions. On y trouve surtout les lois du mouvement, celles du mouvement des fluides, traitées d'une manière distinguée. La physique, dégagée des hochets de l'empyrisme et appuyée sur la chimie et les mathématiques, peut professer enfin des vérités utiles à la société, et suivre la route indiquée par Sgravesande. Il étoit réservé à l'auteur du Traité *des Dimensions*, et du Traité *des Comètes*, d'en aplanir la carrière.

Les notes de l'auteur du Traité de *l'Astronomie physique*, et de *l'Essai sur la Géométrie analytique appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre*, nous dispensent de tout éloge. »

Cette *physique mécanique de Fischer, par M. Biot, sert de complément au traité de physique de M. Haüy*, deuxième édition.

…*bleaux de physique*, par M. *Barruel*, bibliothécaire de l'école polytechnique, p. part. 10 f.
…*écis des leçons sur le calorique et l'électricité*, par M. *Hachette*, instituteur à l'école polytechnique, in-8. 2 fr. 50 c.
…*urs de Physique céleste*, par M. *Hassenfratz*, professeur à l'école polytechnique, in-8. pl.
…*uveau dictionnaire de physique*, par M. Libes, 1806, 4 vol. in-8, dont 1 de planches, pour Paris, 24 fr.
…urs de Physique expérimentale et mathématique. Musschenbroek, traduit par Sigaud de Lafond, 3 vol. in-4.
…vrages de Nollet sur la physique et l'électricité.

Dictionnaire de Physique. Paulian, 3 vol. in-4. —*Idem*, 4 vol. in-8.
Boyle, Opera varia, 3 vol. in-4.
Physique du Monde. Marivetz, 10 vol. in-4.
Electricité du Corps humain. Bertholon, 2 vol. in-8.
Electricité des Météores, par le même, 2 vol. in-8.
Histoire naturelle de l'Air et des Météores. Richard, 11 vol. in-12.
Œuvres de Franklin, 2 vol. in-4.
Œuvres de Mariotte, 2 vol. in-4.
Sgravesande physices Elementa mathematica, 2 vol. in-4.
Elémens de Physique, Mathématiques, ou Introduction à la philosophie newtonnienne, de Sgravesande, trad. par Joncourt, 2 vol. in-4.
Philosophie de la Nature, dernière édition, 10 vol. in-8., fig. 55 fr.
Etudes de la Nature. Bernardin de Saint-Pierre, 5 vol. in-12. Didot, rel.
Cours complet de Physique. Para du Phanjas, 5 vol. in-8.
Théorie nouvelle du Flux et du Reflux de la Mer. Depaquit, in-8. 3 fr. 50 c.
Traité de la Pesanteur spécifique des Corps. Brisson, in-4.
Règne animal divisé en six classes. Brisson, in-4.
Ornithologie. Brisson, 6 vol. in-4., rel.
Observations sur l'intérieur des Montagnes. Tréba, in-fol., planch.
Dictionnaire de Physique. Brisson, 2 vol. in-4. et 1 de planch.
— *Idem*, in-8. 6 vol. et atlas.
Œuvres de Maupertuis, 4 vol. in-8.
Œuvres de Trabaud.
Théorie de la Vis d'Archimède. Paucton, in-12.
Essai sur l'Electricité. Lacépède, 2 vol. in-8.
Théologie de l'Eau, in-8.
Théologie des Insectes, 2 vol. in-8.
L'Art de fabriquer le Salin et la Potasse, in-8.
Mémoire sur le Salpêtre. Ducoudraye.
Œuvres de Sigaud.
Histoire naturelle de Pline. Poinsinet de Sivry, 12 vol. in-4. rel.
Traité des Poisons. Fontana, 2 vol. in-4.
Traité des Pierres précieuses. Pouguet fils, in-4.
Mémoires sur les Insectes. Réaumur, 6 vol. in-4. rel.
Météorologie de Cotte, 2 vol. in-4.
Idées sur la Métrologie. Deluc, in-8.
Hygrométrie de Saussure, in-4.
Mémoires sur les Sciences et Arts. Guettard, in-4.
Minéralogie du Dauphiné. Guettard, 2 vol. in-4.
Spectacle de la Nature, 11 vol. in-12.
Histoire naturelle des Glacières de Suisse. Kéralio, in-4.
Avis aux Ouvriers en fer, sur la fabrication de l'acier, in-4.
Instruction sur l'Art de séparer le cuivre du métal des cloches, in-4.
Volcans du Vivarais. Faujas de Saint-Fonds, in-fol. mar.
Telliamed, 2 vol. in-8.
Physiologie végétale. Sénébier, 5 vol. in-8. 21 fr.
Œuvres de Bonnet, 18 vol. in-8., et ses parties séparées.

émonstrations de Botanique, 4 vol. in-8. planch.
émens de Botanique, 6 vol. in-8.
riptores rei rusticæ, 2 vol. in-4.
ystema naturæ. Linné, ed. Gmelin, 10 vol. in-8.
ystema vegetabilium. Linné, ed. Gmelin, 3 vol. in-8.
raité des Arbres fruitiers. Duhamel, 3 vol. in-8.
ulture des Terres. Duhamel, 6 vol. in-12.
ictionnaire des Jardiniers. Miller, 10 vol. in-4. rel.
ssai sur les Jardins. Vatelet, in-8.
émoire sur le Laminage du plomb. Rémond de Sainte-Albine, in-8.
natomie comparée. Cuvier, 5 vol. in-8. 34 fr.
ableau élémentaire de l'Histoire naturelle des Animaux, in-8. 14 planch. Cuvier. 7 fr. 50 c.

ISTOIRE COMPLETTE DU GALVANISME, depuis sa découverte en 1786, jusqu'à ce jour, avec le détail des expériences faites et des écrits publiés sur ce phénomène, par M. *Suë* aîné, professeur et bibliothécaire de l'Ecole de médecine de Paris, membre de la Société Galvanique, seconde édition, 4 volumes in-8. avec pl. Pour Paris, 15 f.
es tomes 3 et 4 *separément*, 10 fr.

Cet ouvrage renferme tout ce qui tient aux phénomènes du Galvanisme, depuis sa découverte jusqu'à ce moment. On y trouve les expériences de Volta, d'Aldini, d'Humboldt, de Biot, de Hachette, de Hallé, des Savans et des Sociétés Galvaniques, dans tous les pays de l'Europe; tout ce qui a été dit dans le journal de la Société Galvanique, dans les journaux étrangers, y est consigné; il contient l'analyse de tous les ouvrages nationaux et étrangers relatifs à ce phénomène, qui forme un chapitre important dans l'histoire de la physique moderne. Il dispense de compulser tout ce qui a été écrit, puisqu'il réunit tout ce qui y a un vrai rapport. Il est nécessaire dans toutes les bibliothèques qui ont les sciences pour objet. Les livres se sont multipliés à un nombre si considérable, qu'on est très-heureux de posséder ceux qui renferment, en peu de volumes bien analysés, tout ce qui a été dit et pratiqué sur chaque matière. Ces livres offrent une double économie.

RAITÉ DU GOITRE ET DU CRÉTINISME; p. Fodéré, in-8, Paris. 4 f.

Ce Traité réunit tous les moyens propres à délivrer l'humanité de ce fléau.

ISTOIRE COMPARÉE DES SYSTÊMES DE PHILOSOPHIE, par *Degérando*; 3 vol. *in*-8°. 15 fr.

Et d'autres bons Livres de Physique et de Chimie.

ASTRONOMIE, OPTIQUE, GÉOGRAPHIE.

RAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, par J.-B. *Biot*, membre de l'Institut, professeur au collége de France; 2 vol. in-8°, 16 planches. Pour Paris, 10 fr.
— Le même Traité, en 2 vol. in-4°, 16 planches. Pour Paris, 18 f.

Le PREMIER volume contient le premier et le second livres, avec onze planches.

Le *premier* livre renferme les phénomènes généraux du Système du monde et les moyens qu'on a de les observer.

Le *second* livre contient l'application de ces méthodes à la théorie du soleil.

Le SECOND volume comprend les troisième et quatrième livres, avec les 13e., 14e., 15e. et 16e. planches.

Le *troisième* livre contient l'application des mêmes méthodes à la théorie de la lune.

Le *quatrième* livre renferme de la même manière la théorie des planètes, des comètes, et des satellites.

Ce livre est adopté par l'instruction publique; on peut le regarder comme une introduction au *Système du monde*, par M. *Laplace*. C'est l'astronomie mise à la portée de tout le monde. Il est enrichi de notes intéressantes pour ceux qui cultivent les sciences. Les marins y trouveront des connoissances nécessaires pour l'intelligence des traités d'hydrographie.

HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE ANCIENNE ET MODERNE, de *Bailly*, 2 vol. in-8°,, dans lesquels on a conservé religieusement le texte, en supprimant seulement les calculs abstraits, les notes hypothétiques, les digressions scientifiques; par *V. C.*..... Pour Paris, 9 fr.

On desiroit depuis long-temps une édition des œuvres de Bailly, dégagée de tout ce qui n'étoit pas à la portée de tous les lecteurs, et conforme à la réduction des œuvres de Buffon: la cherté des éditions in-4°., le peu d'intérêt qu'on apporte à tout ce qui est hypothétique et indifférent à beaucoup d'hommes éclairés, justifioient ce vœu. Un ami des Lettres, à qui la mémoire de Bailly est chère, s'est chargé de ce soin. Il a donné le texte de l'Histoire de l'Astronomie, sans aucun mélange, sans se permettre aucune altération, aucune observation, en nous transmettant fidèlement cet élégant modèle dans l'art d'écrire l'histoire des Sciences. On y trouve partout le charme heureux d'une brillante imagination, la magie d'un style enchanteur, et cette féconde variété, qui embellit harmonieusement l'érudition la plus vaste et la plus abstraite. Bailly posséde surtout cette clarté qui, dans les sciences, est la première des graces, et qui lui a été si commune avec Fontenelle.

Cet ouvrage, réuni au Traité précédent de M. Biot, forme un Cours complet de la Science. Les professeurs l'ont donné dans les distributions des prix classiques.

Lacaille. Traité d'Optique, in-4. — *Idem*, in-8.
Traité d'Optique, par Courtivron, in-4.
Traité d'Optique, par Smith, in-4.
Traité d'Optique de Newton, par Beauzée, 2 vol. in-8.
Traité d'Optique de Newton, par Coste, in-4. — *Idem*, in-12.
Traité d'Optique, par Bouguer, in-4.
Premiers Principes d'Optique. Trabaud, in-8.
Lacaille. Lectiones Elementares Astronomiæ geometr. et physic, in-4.
Mairan. Traité physique et historique de l'Aurore boréale, in-4.
Jos. Boscovick. Opera præcipuè ad Opticam et Astronomiam. 5 vol. in-
Description et Usage de nouveaux microscopes, par Joblot, in-4.
Observations d'Hist. natur., faites avec le microscope. Joblot, 2 vol. in-
Recherches sur les découvertes microscopiques. Spalanzani, 2 vol. in-8.
Nouveau Traité de la Sphère, 1 vol. in-12.
Usage des Globes céleste et terrestre. Bion, 1 vol. in-12.
Le Microscope moderne, par Rabiqueau, in-8.
Description d'une Sphère mouvante, in-8.

: Sphère, par Rivard, in-8.
lu Mouvement et de la figure elliptique des planètes. Laplace, in-4.
les Comètes. Lemonnier, in-8.
stronomiques. Halley, in-8.
ance de l'Astronomie. Dicquemare, in-8.
oxodromiques, ou Application de la théorie de la figure de la terre
rtes marines. par Murdock, in-8,
lémentaires d'Astronomie. Lacaille, in-8.
les Comètes. Dionis du Séjour, in-8.
les Comètes. Ollivier, in-8.
aphie. Expilly, in-8.
stronomiques. Bertrand, in-8.
s Mesures itinéraires. Danville, in-8.
pour les Astronomes. J. Bernouilly, 2 vol. in-8.
ion sur l'usage des cadrans solaires horizontaux et universels. Che-
, brochure de 32 p.
les Phénomènes. Dionis du Séjour, in-8.
ne de Paris, par Cassini, in-4.
de la Lune, par Clairault, in-4.
stronomiques de Cassini, in-4.
d'Astronomie, par Cassini, 2 vol. in-4.
es astronomiques, par Cheseaux, in-4.
astronomique et géographique, par Maire et Boscovick, in-4.
hie physique. Noguez, in-4.
'abulæ Astronomicæ, in-4. Londini.
nie de Lalande, 3 vol. in-4.
ion à l'Etude de l'Astronomie physique, par Cousin, in-4.
Tables astronomiques calculées pour le méridien de Paris, in-4.
ntroductiones ad physicam et astronomiam, in-4.
rallaxe de la Lune. Maupertuis, in-8.
vement des Corps célestes. Trabaud, in-8.
lii Astronomicon, in-8.
de Calcul de Géométrie et d'Astronomie, in-12.
e la Lune, par Clairault, in-8.
tion à l'Astronomie. Young, in-8.
Méridien entre Paris et Amiens. Picard, in-8.
e la Terre, par Maupertuis, in-8.
ificielle du Temps. Sully, in-12.
néral des Horloges. Alexandre, in-8.
s sur la Météorologie, par Cotte, 2 vol. in-4.
gie, par Romé de l'Isle, in-4.
gie, ou Traité des Mesures, Poids et Monnoies des anciens peuples
modernes. Paucton, in-4.
er italien, ou l'Art de connoître toutes les Monnoies. Benaven,
in-folio.
ions astronomiques, par Darquier, in-4.
egorii Astronomiæ Physicæ et Geometriæ Elementa, 2 vol. in-4

Bibliographie astronomique, avec l'Astronomie, in-4., par Lalande.
Institutions astronomiques, in-4.
Lahire. Tabulæ astronomicæ, in-4.
Mesure du Méridien, par la Condamine, in-4.
Mémoire sur l'Origine des Constellations. Dupuis, in-4.
Nouvelle Théorie astronomique, pour servir d'introduction à la détermination des longitudes, par Rutledge, in-4.
Pietrovitz. Theoria pratica, 2 vol. in-4.
Cométographie, par Pingré, in-4.
Opere di Galileo, 3 vol. in-4.
Journal d'un Voyage au nord, 1736, 1737. Outhier, in-4.
Voyages en Asie. Lebruyn, 5 vol. in-4. — *Idem,* 2 vol. in-folio.
Journal du Voyage à l'équateur, ou Introduction à la mesure des trois premiers degrés du méridien, par la Condamine, in-4.
L'Euphrate et le Tigre. D'Anville, in-4.
Mémoire sur la Mer caspienne. D'Anville, in-4.
Description de la Gaule belgique, in-4.
Etats formés en Europe après la chute de l'Empire romain en Occident. D'Anville, in-4.
Analyse géographique de l'Italie, in-4.
Description du Golfe de Venise et de la Morée, in-4.
Voyages dans la Mer de l'Inde. Legentil, 2 vol. in-4.
Voyages à la Chine, par Mears, 3 vol, in-8. et atlas.
Troisième Voyage de Cook, 3 vol. in-8.
Description géographique et historique de la Corse, in-4., pl.
Relation d'Abissinie. Legrand et Lobo, in-4.
Voyage dans la Louisiane. Laval, in-4.
Voyages dans les pays entre la Mer noire et la Mer caspienne, in-4.
Voyages dans les Alpes. Saussure, 8 vol. in-8. — *Idem*, in-4.
Description historique et géographique de l'Inde. Anquetil du Perron, 4 vol. in-4.
Voyage en Allemagne. Cassini, in-4.
Voyage autour du monde. Dixon, in-4.
Voyage dans l'Amérique septentrionale, in-4.
Voyage de Courtanvaux. Pingré, in-4 cartes.
Voyage en Syrie et en Egypte. Volney, 2 vol. in-4. pap. fin.
Voyage au Pole boréal en 1773. Phipps, in-4.
Voyage de la Mer du Sud. Frézier, in-4.
Histoire des Navigations aux Terres australes. Debrosse, 2 vol. in-4.
Description de l'Arabie. Niebhur, Copenhague, in-4.
Notice de l'ancienne Gaule. D'Anville, in-4.
Recherches historiques et géographiques sur l'Inde. Anquetil du Perron, in-4.
Zend a Vesta. Anquetil du Perron, 3 vol. in-4.
Antiquité géographique de l'Inde, etc. D'Anville, in-4

COURS COMPLET DE COSMOGRAPHIE, DE GÉOGRAPHIE, DE CHRONOLOGIE ET D'HISTOIRE ANCIENNE ET MODERNE; par M. *Mentelle*, membre de l'Institut, en 4 vol. in-8.°, avec un

[At]las de 20 cartes enluminées, *seconde édition*. Pour Paris, 30 fr.

[Lor]*sque la paix sera signée, je mettrai en vente les feuilles destinées à com-[pléter] ceux qui auront acquis cet ouvrage.*

Le *premier* volume embrasse : 1°. la Cosmographie, d'après les nouvelles observations ; 2°. les définitions et les notions élémentaires qui servent d'introduction à l'étude de la géographie, de la chronologie et de l'histoire ; 3°. la description particulière de l'*Asie*, de l'*Afrique* et de l'*Europe* ancienne. 1°. Dans les pays habités par les nations célèbres de l'antiquité, en commençant par les Assyriens, les Babyloniens, les Mèdes, les Perses, les Hébreux, les Phéniciens, en Asie ; les Egyptiens et les Carthaginois, en Afrique ; les Grecs, les Romains, les Gaulois, les Bretons, les Germains, etc., en Europe. L'auteur y considère tous ces peuples sous les rapports géographiques, chronologiques, historiques et politiques. 2°. Dans chacune de ces trois parties de l'ancien continent, il donne des notions sur les pays moins connus des anciens. 3°. M. Mentelle a marqué les principales époques et les changemens successifs chez les anciens peuples, dans un *précis sur la période du moyen âge*, qui lie l'histoire et la géographie anciennes à la géographie et à l'histoire modernes.

Le *second* volume contient la géographie, la chronologie et l'histoire de tous les Etats de l'*Europe moderne*, excepté de la France, qui forme le quatrième volume ; l'Allemagne et le Nord sont traités conformément aux nouvelles divisions politiques.

Le *troisième* volume renferme la description des empires modernes d'*Asie* et d'*Afrique*. Les voyageurs contemporains, Horneman, Renel, Brown, Denon, et les autres voyageurs, ont fourni les observations qui ont enrichi ces deux parties, ainsi que l'*Amérique*.

Le *quatrième* volume est consacré exclusivement à la *géographie de l'empire français*. Il est d'un ami modeste de l'auteur. Notre patrie méritoit cette distinction. Elle est considérée dans son état ancien et moderne. Pour des Français, une étude approfondie de l'histoire, des institutions, des avantages de leur pays natal, est d'une nécessité indispensable. Ce volume est divisé en quatre parties : *physique et mathématique*, *historique*, *statistique et topographique*.

La *première* partie embrasse les rapports de la France avec le globe ; son étendue en degrés, sa latitude, sa longitude, sa situation, sa surface, son climat, le sol, les mers, les îles, les lacs, les montagnes, les bassins, les fleuves, les rivières, les forêts, les canaux, les productions minérales, végétales et animales. — La *seconde* contient le tableau des révolutions, depuis l'origine des Gaules, jusqu'à la fin de l'an XII, ou 1804, c'est-à-dire, sous les Gaulois, les Francs, les Romains, les trois dynasties de la monarchie, la République française, le directoire, le consulat, l'Empire. — La *troisième* embrasse sa population, son état civil, politique, judiciaire, militaire, maritime, littéraire, spécifique, commercial, industriel. — La *quatrième* renferme la description détaillée des cent huit départemens, avec un tableau à la tête de chaque département, qui en donne l'étendue, les bornes, les rivières, les divisions, les arrondissemens communaux, les chefs-lieux des cantons, le nombre des communes, la population totale, son rapport avec les anciennes provinces. A chaque ville, on donne sa population, le précis de l'événement, le nom de l'homme distingué auquel elle doit sa célébrité. — Ce volume renferme 152 *tableaux*, dont un tableau général de tous les départemens classés en trois régions, et un tableau à la tête de chaque département, qui présente dans une page les bornes, l'étendue, la population, les mesures géodésiques, les rivières, les chefs-lieux, et leurs rapports avec leurs anciennes divisions. Les autres tableaux appartiennent à la statistique et à la géographie physique.

L'*Atlas du Cours complet de géographie et d'histoire* se compose, 1°. de *tableaux* in-folio ; 2°. de 20 cartes, dont 10 enluminées. Les plans d'*Athènes*, de *Sparte*, de *Syracuse*, renferment leurs ports, leurs monumens.

ABRÉGÉ ÉLÉMENTAIRE DE GÉOGRAPHIE ANCIENNE ET MODERNE, 2 vol. in-8. , avec six cartes, et la carte de l'empire français, comparative, in-folio, enlum. Prix, pour Paris, 10 f.

Le *premier* volume, *seconde édition*, contient des notions de cosmographie, un traité de géographie ancienne, la description de l'Amérique, de l'Asie, de l'Afrique et de l'Europe moderne (hors la France) ; les époques majeures de la chronologie ancienne, du moyen âge, et moderne, et six cartes.

Le *second* volume est *la Géographie de l'empire français*, indiquée ci-dessus.

GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE, HISTORIQUE, STATISTIQUE, TOPOGRAPHIQUE DE L'EMPIRE FRANÇAIS, 1 vol. in-8. avec 132 tableaux, et une carte comparative des 108 départemens, enluminée, dessinée par M. *Lapie*, et gravée par F. Tardieu.

Ce livre est le plus précis et le plus complet pour la partie des détails historiques ; les tableaux en sont très-lumineux. Pour Paris, 7 fr.

A la paix, je mettrai en vente la feuille qui doit compléter les événemens de la partie historique depuis l'an XII, époque où je donnerai une feuille supplémentaire ; j'y joindrai celle qui doit en compléter la géographie, pour ceux qui ont déjà l'ouvrage.

TABLEAU SYNCHRONIQUE DES ÉVÉNEMENS IMPORTANS DE L'HISTOIRE ANCIENNE ET MODERNE, par ordre de siècles, *avant* et *après* l'ère vulgaire, in-folio, avec une explication in-8. pour servir de guide dans l'étude de l'Histoire, par *Mentelle*. 2 f.

ATLAS de *Mentelle*, en noir, br. sans tableaux, de 20 cartes. 8 f.

— Le même, partie ancienne, 7 cartes, *br.* 5 fr.

— Le même, partie moderne, 13 cartes, *br.* 6 fr.

ATLAS HISTORIQUE, GÉNÉALOGIQUE, CHRONOLOGIQUE, ET GÉOGRAPHIQUE de Lesage, 32 cartes color. grand in-fol., pap. ord., deuxième édition. 90 fr.

DICTIONNAIRE GÉOGRAPHIQUE PORTATIF, DE VOSGIEN, vingtième édition revue et augmentée d'après le traité de Presbourg 1806, 1 gros vol. in-8. Prix pour Paris, 9 fr.

Et d'autres bons Livres d'Astronomie, d'Optique et de Géographie.

MATHÉMATIQUES.

PLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMETRIE, à l'usage des lèves de l'ecole Polytechnique, contenant les *feuilles d'analyse* de I. *Monge*, avec des Notes de M. Hachette, examinateur des Candidats e l'école Polytechnique, et professeur à Paris; in-4., avec planc., roisième édition; pour Paris, 12 fr.

ITHMÉTIQUE UNIVERSELLE DE NEWTON, traduite en français, avec des notes explicatives, par *Beaudeux*, 2 vol. in-4. 14 pl. br. 18 f. Les exemplaires sur papier vélin sont rares.

« Les éditions latines, dit un savant, sont rares et coûteuses; ce livre élémentaire manquoit à notre langue. L'auteur a fait de ce chef-d'œuvre de Newton un ouvrage classique. Sa traduction est claire et élégante; les notes remplissent les lacunes importantes, expliquent les passages difficiles, et donnent l'application des méthodes modernes. Cette édition a été exécutée avec le plus grand soin; on y trouve la note des diverses éditions de tous les ouvrages de Newton. Le discours préliminaire sur la vie et le génie de ce grand homme, est un modèle de goût et de clarté. Bien des professeurs éclairés ont adopté pour texte de leurs leçons ce livre recommandable.

ithmetica universalis, cum Comment. Castilhionei, 2 vol. in-4.
wtoni Opuscula mathematica, 5 vol. in-4.
usdem Philosophiæ naturalis Principia mathematica, 2 vol. in-4.
usdem Lectiones opticæ, in-8. et in-4.
usdem Optice; sive de reflexionibus et coloribus lucis, in-4.
tique de Newton, traduit par *Beauzée*, 2 vol. in-8.
Le même, par *Coste*.
usdem Arithmetica universalis, in-4. *Idem* in-8. rare.

SAI DE GÉOMÈTRIE ANALYTIQUE, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, par M. *Biot*, seconde édition, 1 vol. in-8°, avec 6 planches. Pour Paris, 5 f.
em in-4. 10 f.

La première édition de cet ouvrage avoit paru avec un titre plus restreint: *Traité analytique des courbes et des surfaces du second ordre.* L'auteur éclairé par les remarques d'un grand nombre de professeurs qui ont enseigné son livre, s'est efforcé d'y faire toutes les corrections qui peuvent en faciliter l'étude. Il en a étendu l'usage en l'abrégeant; et, au lieu d'un Traité particulier, il a tâché d'offrir aux élèves tous les élémens nécessaires pour apprendre à manier la géométrie analytique, telle qu'on l'enseigne à l'École Polytechnique, d'après les principes de M. Monge, et telle qu'on la trouve dans les écrits des plus grands géomètres. Les courbes et les surfaces du second ordre n'offrent plus qu'une application de ces principes généraux, que l'auteur a tâché de rendre aussi élémentaire qu'il est possible.

Ce livre est universellement adopté dans l'instruction mathématique à Paris.

RAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, par *Cousin*, 2 vol. in-4. 6 pl. dernière édition. 21 f.

TRAITÉ DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE ou d'Algèbre, par le même, in-8. br. Il sert d'introduction au Calcul différentiel. 4 f.

ŒUVRES MATHÉMATIQUES et ASTRONOMIQUES de Goudin, nouvelle édition, in-4. avec pl. 8 f.

Bézout, Arithmétique, 2 fr. 50 c.
Mécanique, 6 fr. 50 c.
Algèbre, 3 fr. 50 c.
Géométrie, 5 f.

Traité des propriétés des Courbes et de l'Ellipse, par *Goudin*, in-4. 3 f.
Arithmétique décimale, par *Simonin*, in-8. 1 f.
Bibliotheca mathematica, *Murhard*, 5 vol. in-8. 34 f.
A Sexagesimal table, by Taylor, in-4., 1780.
Tables de Logarithmes. Gardiner, 1 vol. in-4.
— Les mêmes, en anglais.
Tables de logarithmes, par *Callet*, édt. stéréot., 2 vol. in-8. 13 f.
Tables décimales de *Borda*, gros in-4. 15 f.
Tables portatives de *Marie*, in-12. 6 f. 15 c.
Cours de Mathématiques, par *Camus*, 4 vol. in-8. gr. pap.
Développement de la partie élémentaire des Mathématiques, par *Bertrand*, 2 vol. in-4.
Elémens de Calcul intégral. *Leseur* et *Jacquier*, 2 vol. in-4. 36 f.
Traité du Calcul intégral, par *Bougainville*, 2 vol. in-4. 27 f.
Veterum Mathematicorum quæ extant, in-fol.
Pappi Alexandri Mathematicæ collectiones. Venetiis, 1588. 70 f.
Diophanti Alexandrini Arithmeticorum, libri sex in-fol.
Euclidis Opera omnia. Oxonii, in-fol. — *Idem*, in-fol. Basileæ.
Leibnitii Opera omnia. Genève, 1768, 6 gros vol. in-4. rel. 70 f.
Wolffii Elementa Matheseos, 5 vol. in-4.
Joannis Bernoulli Opera, 4 vol. in-4. 48 f.
Jacobi Bernoulli Opera, 2 vol. in-4. 36 f.
Danielis Bernoulli Hydrodynamica, in-4. 21 f.
Ars conjectandi. Bernoulli, in-4. 15 f.
Introduction à l'analyse des lignes courbes, par *Cramer*, in-4. 48 f.
Institutions de Géométrie, par *La Chapelle*, 2 vol. in-8. 10 f.
Traité des Sections coniques, par le même, in-8. 9 f.
Traité des Sections coniques, par *L'Hôpital*, in-4. 12 f.
Analyse des infiniment petits, par le même, in-4. 12 f.
Introductio in Analysin infinitorum. *Euleri*, 2 vol. in-4. 24 f.
Ejusdem Institutiones Calculi differentialis et Calculi integralis, cum supplementis. *Ticini* et *Petropoli*, 6 vol. in-4. 160 f.
Elémens d'Algèbre. d'*Euler*, 2 vol. in-8. 12 f.
Et les autres ouvrages d'Euler, séparément et collectivement.
Opuscules Mathématiques, par d'*Alembert*, 8 vol. in-4. 120 f.
Et tous ses Ouvrages en collection, et séparément.
Elémens de Géométrie, par *Thomas Simpson*, in-8.
Recherches sur les courbes à double courbure. *Clairault*, in-4.
Essai sur l'application de l'Analyse aux probabilités. *Condorcet*, in-4. 15 f.
C[illegible] intégral, par le même, in-4.
[illegible] Methodus incrementorum, in-4.

Enumeratio linearum tertii ordinis, in-8.
nalyse sur les jeux de hasard, par *Montmaur*, in-4. 25 f.
ns physiques et mathématiques, par Guyot, 3 vol. in-8, 52 pl. 18 f.
ns mathématiques, par *Ozanam*, 4 vol. in-8, dernière édit. 20 f.
ire de mathématiques d'*Ozanam*, in-4. 18 f.
Mathématiques, par *Benj. Robins*, in-8. 5 f.
s Fluxions, par *Maclaurin*, 2 vol. in-4. 20 f.
ire encyclopédique, partie mathématique, 5 vol. et 1 de
es. 72 f.
éditions, d'*Archimède*, d'*Apollonius*, de *Théodore*, de *Fermat*,
row, de *Pascal*, de *Huygens*, de *Descartes*, de *Leibnitz*.
noires des Académies des Inscriptions et Belles-Lettres, des
es, de l'Institut national ; — des Académies de Berlin, de
bourg, de Gottingue, de Bologne, de Turin, et les Actes de Leipsick.
de Mathématiques de la Philosophie naturelle, par Me Duchâtelet,
in-4.
Géométrie. Le Gendre, in-8.
de la Philosophie newtonienne. Pemberton, in-8.
it analysis infinitorum, in-8.
, Introduction aux Sections coniques, in-8.
me, Arithmétique, in-8.
ème, Géométrie, in-8.
d'Algèbre. Lhuilier, 2 vol. in-8. 12 fr.
Lectiones elementares Mathematicæ, seu Elementa Algebræ et
etriæ, in-4.
e Mathématiques. Mazéas, in-8.
Mathématiques de Saury.
nétrie rectiligne. Dupain de Montesson, in-8.
e la résolution des Équations. Mouraille, in-4. rel.
nétrie de Cagnoli, in-4. (rare).
nétrie rectiligne et sphérique. Deparcieux, in-4.
les probabilités de la Vie humaine, *idem*, in-4.
s Annuités, *idem*, in-4.
Analyse. Condorcet, in-4.
stitutione analyticâ, 2 vol. in-4.
. Mélanges mathématiques, in-4.
ini. Opera Mathematica, Hydraulica, 2 vol. in-4.
Opera, 3 vol. in-4.
Polygonométrie, ou Mesure des Figures rectilignes.
e Mathématiques, in-8., Lacaille.
Astronomie, in-8., *idem*.
e Mécanique, in-8., *idem*.
tique universelle à l'usage de tous les commençans. Castel,
in-4.
Apollonii conica, in-4.
. Lectiones Opticæ et Geometriæ, in-4.
e la construction, et des usages, et des instrumens de mathéma-
Bion, in-4.

Mémoire sur les Courbes à double courbure. Rose, in-4.
Roberti Simson. Opera reliqua, in-4.
Traité du Triangle arithmétique. Pascal, in-4.
Théorie des équations. Bezout, in-4.
Amusemens arithmétiques et algébriques de la Campagne. Luya, 2 v. in-4.
Calcolo integrali. Brunacci, in-4.
Traité d'Algèbre. Maclaurin, in-4.
Œuvres de M. Bossut.
Calcul d'Agnési, du même, in-8.
Traité du Calcul intégral. Bougainville, in-4.
Élémens d'Algèbre. Saunderson, 2 vol. in-4.
Dictionnaire de Mathématiques et de Physique. Savérien, 2 vol. in-4., rel.
Élémens du Calcul et Intégral. Leseur et Jaquier, 1768, 3 vol. in-4.
Rog. Bacon. Opus majus, in-fol. Londini.
Application de la Géométrie et des Calculs différentiel et intégral, à la résolution de plusieurs problèmes. Robillard, in-4.
Dictionnaire des Sciences et Arts, ou Encyclopédie, 35 vol. in-fol. rel.
— Le même, 36 vol. in-8. rel., avec 3 vol. in-4. de planches.
Histoire des Mathématiques, par Montucla, 4 vol. in-4. 63 fr.
Essai sur l'histoire des Mathématiques, par M. Bossut, 2 vol. in-8. Paris, 12 fr.
Et d'autres bons Livres de Mathématiques.

ARTS, MÉCANIQUE, ARCHITECTURE.

Arts.

Traité du Beau-Essentiel, dans les Arts, par Briseux, 2 vol. in-fol., avec planches.
Dictionnaire des Arts et Métiers, par Jaubert, 5 vol. in-8. 18 fr.
Bibliothèque des Artistes et des Amateurs, 3 vol. in-4, par Petity.
F. Junii de Pictura veterum Lib., 1 vol. in-fol., rel.
Chefs-d'Œuvre de l'antiquité sur les beaux Arts, gravés par Picart, 2 vol in-fol., rel.
Traités de Perspective de Jehan Gousin, de Niceron, d'Aleaume, de Vaulezard, de Bretez, de Courtone, de Sgravesande, d'Ozanam, de Lami, de Leclerc.
Perspective de Pozzo, 2 vol. in-fol.
Galerie de Dusseldorf, 2 vol. in-fol., obl.
Traité des Pratiques géométrales et perspectives, par Bosse, in-8.
Traité de Perspective, par Jeaurat, in-4., pl. 6 fr.
Traité de Perspective linéaire, par Lespinasse, in-8., 26 pl.
Nouveaux principes de la perspective linéaire de Taylor, et de Murdock, in-8.
Élémenti di Perspettiva secondo li principii di Taylor, par Jacquier, in-8.
Dictionnaire pittoresque et historique. Hébert, 2 vol. in-12.
Dictionnaire de Peinture, Sculpture, Gravure, etc. Vatelet, 5 vol. in-8.
Vie des Peintres flamands, allemands et hollandais, avec des portraits. Descamps, 5 vol. in-8.
Abrégé de la Vie des Peintres. Dargenville, 2 v. in-8.

Traité de la Composition des Vernis, in-12.
Traité des Couleurs. Le Pileur d'Apligny, in-12.
Vies des premiers Peintres du roi. L'Épicié, 2 vol. in-12.
Œuvres complètes de Mengs, 2 vol. in-4.
Le Grand-Livre des Peintres. Gérard de Lairesse, 2 vol. in-4.
Œuvres de Falconnet, 6 vol. in-8.
Traité de la Peinture. Richardson, 3 vol. in 8.
Dictionnaire des Artistes, 2 vol. Fontenai.
Entretiens sur les Vies et les Ouvrages des Peintres anciens et modernes, les plus célèbres, 7 vol. in-12, fig.
Traité des Couleurs pour la Peinture. Montamy, 3 vol. in-12.
Traité de la Peinture. Léonard de Vinci, in-12, 1716.
Dictionnaire des Monogrammes, in-8, 1750.
Dictionnaire abrégé de Peinture et d'Architecture, 2 vol. in-12.
Réflexions sur la Peinture et la Gravure. Joullain.
Traité historique et pratique de la gravure en bois. Papillon, 2 vol. in-8.
Traité de la Peinture au Pastel, in-12.
Traité de la Mignature, in-12.
Essai sur la peinture. Diderot, in-8.
Histoire Universelle, relative à la Peinture et Sculpture. Bardon, in-12.
Traité du Lavis des plans, par Lespinasse, in-8, fig. 5 fr.
Traité des manières de dessiner les ordres de l'Architecture antique, par Bosse, 1 vol. in-fol. avec planch.
Œuvres choisies de J. Séb. Leclerc, 1 vol. in-4, 239 estampes gravées par lui.
Traité des pierres gravées. Stosch. fig p. Picart, in-fol. rel.
Manière de graver en taille douce. Bosse, in-8.
La Science des Ombres pour le dessein. Dupain., in-8.
Règles du dessin et du Lavis. Buchotte, in-8.
Art de lever les plans Dupain de Montesson, in-8.
Méthode de lever les plans. Ozanam, in-12.
Pratique de la Géométrie sur le papier et sur le terrain. Leclerc, in-12.
Traité de Géométrie pratique : le même, in-8.
Traité de l'Usage du Pantomètre. Bullet, in-12.
Pratiques de l'Arpentage par des tables pour les calculs trigonométriques, 1 vol in-8.
Génération harmonique, ou Traité de musique théorique pratique. Rameau, 2 vol. in-8, avec pl., rel., avec d'autres ouvrages du même auteur, sur la musique.
Recherches sur la Théorie de la Musique. Jamard, in-8.
Poétique de la Musique. Lacépède, 2 vol. in-8.
Dictionnaire de musique. 36 fr.
Rousseau, in-4. — L'art musical, in-8. = Essai sur la Musique ancienne et moderne, 4 vol. in-4. — Traité de l'Harmonie, réduite à ses principes naturels. Rameau, in-4.
Mémoires historiques et pratiques sur la Musique des Anciens. Rouffier, in-4.

Traité de musique. Benetzrieder, in-8.
Recherches sur l'origine des découvertes. Dutems, in-8.
Secrets concernant les Arts et Métiers, 2 vol. in-8.
L'art d'imprimer les tableaux, d'après les instructions verbales. Leblon, in-8.
Vie des Peintres anciens et modernes, par Félibien, 5 vol in-4.
La même en 3 vol. in-12.
De Arte vitrariâ. Néri, in-12.
Histoire de l'origine et des progrès de l'Imprimerie, in-4.
Histoire de la Librairie et de l'Imprimerie, in-4.
Travaux de la fonte de la Statue équestre de Louis XV, in-fol., pl.
Les mêmes de la Statue de Louis XIV, Boffrand, in-fol.
L'Art de tricoter, 50 pl. in-fol., obl.

Militaire - Marine.

Traité élémentaire d'Art militaire et de Fortification à l'usage des Élèves de l'École polytechnique et des Écoles militaires, par *M. Gay-de-Vernon*, ancien professeur de fortification à l'école Polytechnique, colonel commandant en second de ladite école impér. 2 vol. in-4, pl. 24 fr.
Élémens d'Histoire Militaire divisés en élémens Historiques et Biographie Militaire; par M. *Chantreau*, professeur d'Histoire, près l'école spéciale et militaire, à Fontainebleau, 1806, 4 pl. 7 fr.
Traité de la Guerre et des Retranchemens. Foissac, 2 vol. in-8.
L'Art des Armes. Danet, 2 v. in-8.
Essai sur la Castramétation. Leblond. Arithmétique et Géométrie de l'Officier, in-8.
Code militaire, 8 vol. in-12.
Détails militaires, 6 vol. in-12.
Dictionnaire militaire, 3 vol., rel.
Mémoires de Feuquières.
Commentaire sur les Institutions militaires de Végèce. Turpin, 3 v. in-4, r.
Commentaires de Turpin sur Montecuculli, 3 vol. in-4.
Mémoires de Duguay-Trouin, in 4.
Histoire du Comte de Saxe, 3 vol. in-4, rel.
Histoire de Turenne, 2 vol. in-4.
Ingénieur de Campagne. Clairac, in-4.
Mémoires militaires sur les Grecs et les Romains. Guischard, 2 vol. in-4.
Frontini Stratagematum Libri, in-8.
Art militaire des Chinois, in 4, fig.
Traité des Subsistances militaires, in-4, rel.
Mémoire sur la Fortification perpendiculaire. Montalembert.
Art de la Guerre, par Puységur, 2 vol. in 4, rel. — *Idem*, 2 vol. in-fol. pl.
— Campagne de Condé en Flandre, 2 vol. in-fol., rel. pl.
Art de la Cavalerie, par G. de Saunier, in-fol. pl.
Instruction du Roi pour l'Exercice du cheval. Pluvinel, in-fol. pl.
Mémoire artificiel des principes de la représentation des Animaux en ...
...pture pour ceux qui se destinent à monter à cheval, in-fo.
...lerie. Laguerinière, in-fol. rel.

s d'Hippiatrique. Lafosse, 65 pl., in-fol.
té de Vénerie. D'Yauville, 1788.
e du Maréchal. Lafosse, in-4.
ait Maréchal. Garsault.
omie générale du Cheval. Garsault, in-4.
té sur la Cavalerie. De Melfort, 2 vol. in-fol. et pl.
hode et Invention nouvelle de dresser les Chevaux, par Neucastle, uxième édition, in-fol. planch.
s élémentaire de Tactique navale, par Aud. Ramatuelle, 2 v. in-4, nt 1 vol. de 68 pl.
s d'Hydrographie. Lassale, 2 v. in-8.
té de Navigation. Lacaille, in-8.
onomie nautique lunaire, in-8.
ge des Vaisseaux. Saverien, in-8.
ns de Navigation. Dulague, in-8.
ription de l'Octant pour les Marins. Poitevin, in-4, rel.
ionnaire de Marine, in-4.
le la Corderie. Duhamel, in-4.
igation intérieure de Bretagne, in-fol.
men maritime, par Juan, 2 vol. in 4.
ription des Octans et Sextans anglais, in 4, rel.
hode pour le Jeaujeage des Tonneaux. Pézenas, in-4.
aux de Nuit dans les temps de brume, in-fol.
des Armées navales. Hoste, in-fol. pl.
ine militaire, in 8, rel. fig.
lrographie. Fournier, in-fol.
eeps Bouw en Bestier. Vittsen, in fol. pl.
les for Correction the apparent Distance of the Moand and à star rom the Effects of Refraction and Parallax, par la commission, ou ables de Navigation utiles aux Marins.
onnances des Rois sur la Marine de 1765, à 1781, 2 vol. in-4.
oire de la Navigation. Linschot, in-fol.
onnances des Rois de France, concernant l'Infanterie et la Cavalerie, epuis 1762, 21 vol. in-fol. demi-reliure.
at-Britains Coshing Pilot, 1 vol. in-fol., avec des cartes, rel.
Pilote de Saint-Domingue et des Débouquemens de cette île, avec ne carte et des planch., 1 vol., gr, in-fol.

Mécanique.

CUEIL DE MÉMOIRES INÉDITS DE LA BIBLIOTHÈQUE MPERIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES, publié par M. *Lesage*, ngénieur en chef, inspecteur de ladite école, 1 vol. in-4. avec 16 plan. ant in-4. qu'in-folio, et le portrait de M. PERRONET : prix, pour aris, 15 fr.

Ce recueil contient 1° une Notice historique sur la vie et les *ouvrages* de M. Perronet; 2° l'Exposé de ses *travaux*; 3° des *Observations* faites par MM. *Lesage* et *Perronet*, dans leurs voyages en 1784 et 1785, sur les grands chemins de l'Angleterre, sur les rues, ponts, places publ chariots, ponts à bascules d'Angleterre; 4° un *Mémoire* inédit sur la *construction* et l'*entretien des chemins* en plaines et montagnes, par M. Dubaguet, en 1794; 5° un *Mémoire* sur les *vers à tuyaux* qui percent les vaisseaux, et rongent les pieux des digues dans les ouvrages exposés à l'eau; 6° la description d'une *machine* pour faire connoître les *sous-courans* qui existent à l'embouchure des fleuves à la mer; 7° une table des *produits de la vis d'Archimède*, et des hauteurs auxquelles ces machines peuvent élever l'eau, suivant leurs différentes longueurs, leurs diamètres et inclinaison de position; 8° une Table des *pesanteurs spécifiques des corps*, à laquelle on a ajouté la conversion des valeurs en mesures métriques, très-nécessaire à tous les travaux hydrauliques; 9° une *Table* par ordre de matières des ouvrages historiques et des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, depuis son établissement en 1666 jusqu'en 1806, infiniment commode pour connoître les productions relatives à l'art de l'ingénieur; 10° un Exposé succint de diverses *machines* inconnues et utiles de *la Galerie des Modèles* de l'Ecole des Ponts et Chaussées; 11° une *Table des machines* consignées dans les Annales des Arts et Manufactures, depuis 1799; 12° une Table des *mémoires* et des *machines* des Sociétés Académique et Royale de Londres.

Les 16 *planches* renferment la *description* des divers ponts de Londres et d'Angleterre, tant en pierre qu'en fer, et en bois; de plusieurs machines et diverses perspectives.

Ce livre est nécessaire aux ingénieurs, aux mécaniciens, aux architectes.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE, à l'usage des Lycées impériaux, et de l'école Polytechnique, par M. Francœur, professeur aux Lycées de Paris, examinateur des Candidats de l'école impériale Polytechnique; 1 vol. in-8., pl., *quatrième édition*; pour Paris, 7 fr.

RECUEIL DE MÉCANIQUE, et description de machines relatives à l'agriculture et aux arts; par Person, faisant suite aux ouvrages de Berthelot, et de Servière, in-4, 18 pl. p. Paris. 9 fr.

Mécanique appliquée aux Arts, à l'Agriculture et au Commerce. Berthelot, 2 vol. in-4., 132 pl.

Traité élémentaire de Mécanique, par Jantet, 1 vol. in-8., 9 pl. 5 fr.

Moyens mécaniques pour tirer un grand parti de la force des vents, par Rogniat.

Essai sur la construction des Voitures à transporter de lourds fardeaux dans Paris, par Feutry, in-4.

Mémoire sur l'application des principes de la Mécanique à la construction des Voûtes et des Dômes, in-4., par Gauthey.

Œuvres de Physique et de Mécanique, de Claude et de P. Perrault, 2 vol. in-4.

Recueil d'ouvrages curieux de Mécanique et de Physique. Servière, in-4., fig.

Traité des forces mouvantes. Lecamus, in-8.

Mémoires sur le Dynamomètre, pour connoître et comparer la force relative des Hommes, celle des Chevaux et des Bêtes de trait, in-4.

Mémoire sur une nouvelle manière d'appliquer les Chevaux au mouvement des Machines, par Perronet, in-4.

Dessins artificiaux de toutes sortes de Moulins à vent, à l'eau, à cheval, à la main, par Strada, 1618, 1 vol. in-fol., 100 pl.

:ura mecanica, ou Architecture des Moulins. Amsterdam, 1 vol.
, avec pl.
les Moulins à soie. Payen, in-4.
n Instrumentorum et Machinarum. Bessoni, 1578, 1 volume in-fol.
: Machinarum univers. Von dan ver. Amsterd., in-fol., pl. rel.
a Machinarum novum. Bockleri, 1662, 1 vol. in-fol., 154 pl.
on d'une machine à feu, pour les Salines; de Cambray, in-4.
; et Inventions de l'Académie, 1 vol. in-fol., pl.
:ure hidraulique, par Bélidor, 4 vol. in-4.
les Ingénieurs, par le même, 1 vol. in-4., 47 pl. (rare).
:ure hydraulique, par M. Prony, 2 vol. gr. in-4, pl.,
:es sur les moyens d'exécuter sous l'eau, des travaux hydrauliques,
. Coulomb, in-8.
:es sur la construction et la meilleure disposition des Digues, par
2 vol., in-8.
:velles sur les Courans d'eau, la Navigation intérieure et la Marine.
st, in-8.
on des trois formes du port de Brest, 1 vol. gr. in-fol., 14 pl.
sur le jaugeage des eaux courantes, par M. Prony, 1 vol., in-4.
4 fr.
les Machines hydrauliques. Ducrest, in-8.
is sur le projet de l'Yvette, de feu de la Nouerre, in-8.
erienze Idrauliche. Ximénès, in-4.
delle Perizie e Opuscoli Idraulici, 2 vol. in-4.
le Machines pour l'élévation des eaux, par Morlan, 1 vol. in-4.,

d'encaissement, pour fonder facilement et solidement à toute
deur dans les rivières, les marais, la mer, par Tardif, 1 vol.
fol., 29 pl.
e ponti di N. Zabaglia, e con la descrizione del transporto dell'
:o vaticano, e di altri del D. Fontana, 1 vol. in-fol., 54 pl.
ro flavio, dab. C. Fontana, in-fol, avec pl.
:sques antiques des Bains de Livie, et de la Ville-Adrienne, avec
fonds de la Ville-Madame, peints d'après les dessins de Raphaël,
grand in-fol.
dell alluvioni, 1 vol. in-fol.
:érimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des Fluides
ues et sur la force expansive de la vapeur de l'eau, par Prony,

u mouvement et de la mesure des eaux coulantes et jaillissantes,
in 4., par Varignon et Pujol.
sur la Navigation intérieure, par M. Allemand, 1 vol. in-4.
le différens projets d'Architecture de charpente et autres, concer-
: construction des Ponts, par Pitrou, 1 vol. gr. in-fol., 35 pl.
la manière la plus avantageuse de construire les Machines hydrau-
et les Moulins à blé, par Fabre, 1 vol. in-4°, fig.

Mémoire sur la navigation des rivières de France, d'après Vauban, Dupain-Triel, in-4.
Mémoire sur la Navigation du royaume, par Defer, in-4., avec la carte.
Œuvres de Perronet, 3 vol. in-fol.
— Les mêmes, 1 vol. in-4, avec 1 vol. de pl. in-fol.
— Le supplément, 1 vol. in-fol. 36 fr.
Description du pont de Moulins, sur l'Allier. Regemortes, in-fol. 16 pl.
Mémoire sur le cintrement et le décintrement des Ponts, et sur les mouvemens des Voûtes, par Perronet, 1 vol. in-4.
Mémoire sur les moyens de construire de grandes Arches, in-4., par Perronet.
Devis des ouvrages pour la construction du pont de Louis XVI, par Perronet, 1 vol. in 4.
Projet d'une Travée de charpente, de 36 pieds, par Perronet, in-4.
Dictionnaire des Ponts-et-Chaussées, par Exchaquet, 1 vol. in-8.
Traité de la force du Bois, par le Camus, in-8.
Mémoire sur les Ponts-et-Chaussées, par la Millière, in-4., avec le suppl. 4 fr.
Description des Travaux hydrauliques, par M. de Cessart, 2 vol. in-4., pl. Le premier paroît, 1806. 36 fr. pour Paris.
Traité de la construction des Ponts et Chemins, par Gautier.
Dictionnaire des termes d'Architecture, 1 vol. in-12.
Recherches sur la préparation des Romains, pour la Chaux.
Rapport sur le projet du Canal de l'Ourcq, par Girard, in-4. 4 fr.
Recherches sur les moyens de perfectionner les canaux de navigation, de Fulton, trad. par M. Récicourt, ingénieur des Ponts-et-Chaussées, in-8, 7 pl. Paris. 6 fr.

RÉFLEXIONS SUR L'ARCHITECTURE, LA SCULPTURE, LA PEINTURE, in-8, par M. *Pommereuil*. 4 f.

On y a joint, en 1805, une *note* authentique, et très-détaillée, des objets de sciences et arts, conquis par les Français en Italie, et recueillis dans le Musée Napoléon.

PLANS, COUPES ET ELEVATIONS des diverses productions de l'art de la charpente, exécutées tant en France que dans les pays étrangers, par *Kraff*; 4 parties in-folio, en feuilles, contenant 220 pl. 150 f.

Cet ouvrage contient les termes techniques et explicatifs de l'art de la charpente. On y traite de l'origine et de la construction des charpentes chez plusieurs nations; d'élévations en pans de bois et planchers; des manières d'établir les escaliers; des combles, hangards, mansardes, halles, guinguettes, coupoles, échaffaudages; de la construction des ponts de toute espèce dans tous les siècles; des caissons, des machines à épuisemens, des travaux maritimes et navigations intérieures, des jettées, des digues, etc.

Architecture.

Précis des Leçons d'Architecture données par M. Durand, architecte, professeur à l'Ecole Polytechnique, 2 vol. in-4. 64 pl. 40 fr.
Traité de statique, par M. Monge, in-8. 3 fr.
Traité de géométrie descriptive, par le même. 8 fr.

e Architectura, libri X. Lugduni, in-folio. [illegible]
e Vitruve, édition de Perrault. 1684, 1 vol. in-folio.
es dix livres d'Architecture, par Vitruve, [illegible] vol. [illegible]
ire Encyclopédique (architecture), 2 vol. in-4. [illegible]
ire d'architecture, par d'Aviler, 2 vol. in-4. pl
ire d'Architecture civile, militaire, navale, hydraulique ancienne
erne; par Leviriloys, 3 vol. in-4, pl.
de l'Architecture ancienne et de la moderne, par Chambray.
ne édition, 1 vol. in-folio, pl. — Le même in-8, avec pl.
es Travaux de l'Ecole Polytechnique, in-folio, [illegible]
r. unique, [illegible]
s cinq ordres d'architecture, par Vignole, 1 vol. in-folio, [illegible]
s cinq ordres d'architecture, dont se sont servi les anciens,
u Palladio, avec de nouvelles inventions pour l'art de bien bâtir,
muet. 1 vol. in-4 avec pl.
l'architecture, par Panseron, 3 vol. in-4 avec pl
architecture pratique, par Monroy, 1 vol. in-8, [illegible] pl.
degli Architetti antichi e moderni, par Milizia, [illegible]
, 2 vol. in-8.
eorique et pratique de l'Art de bâtir, par M. Rondelet, [illegible]
ns, in-4, fig., 3. Paris, [illegible]
nière livraison est sous presse.
ipes de l'Architecture de la Peinture, avec un Dictionnaire [illegible]
de ces arts, par Félibien, 1 vol. in-4, [illegible] pl.
ure de Chambers, 1 vol. gr. in-fol. [illegible] pl.
rchitecture, par Leclerc, 1 vol. in-4, pl.
rchitecture, par Dupuis, 1 vol. in-4, pl.
lémentaire d'Architecture, par Neufforge, [illegible] pl. [illegible] vol.
[illegible]
ie moderne, ou Traité élémentaire d'architecture, par [illegible]
in-4, pl
Architecture contenant les cinq ordres, [illegible] Vignole, [illegible]
Philibert de Lorme et Scamozzi, avec [illegible], par [illegible]
[illegible]
[illegible] Rondelet, 2 vol. in-8, [illegible] vol. in-4.
[illegible] par [illegible] pl.
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

Art de la Charpenterie, par Jousse, 1 vol. in-fol.
Studio d'Architettura civile, de Piu celebri architetti publicat, 2 vol. in-fol. avec pl.
Muséum Cortonense, in-fol.
Iconographie, ou vies des Hommes Illustres du XVII^e siècle avec les portraits; par Dandick, in-fol. rel.
L'antique Rome, dans ses costumes civils, militaires et religieux, in-4. col. v. fil. t. dor.
Recueil de desseins de Fontaines et de Frises, par Lebrun, in-fol. pl.
Recueil d'Ornemens à l'usage des jeunes artistes, par Cauvet, 1 vol. grand in-fol. 1778.
Répertoire des Artistes, ou Recueil de compositions d'Architecture, et Nouvelles inventions de portes, cheminées et d'ornemens de toute espèce, avec un abrégé de la vie et des ouvrages de célèbres artistes, 2 vol. in-fol. avec 688 planches.
Recueil de Plans et dessins concernant la Halle aux grains de Paris; par Lecamus de Mézières, gr. in-fol. 23 pl.
Plan, coupes, élévations, profils de Saint-Philippe du Roule, gr. in-f., 17 pl.
Description des Écoles de chirurgie, par Gondoin, gr. in-fol., 30 pl.
Description de la Place de Louis XV, à Reims, 1 vol. gr. in-fol., pl.
Recueil des 177 planches de Marot père et fils, 1 vol. in-fol. rel.
Traité de la Coupe des pierres, par la Ruë, 1 vol. in-fol.
Traité de la Coupe des pierres, par Frézier, 3 vol. in-4.
Temples anciens et modernes, 1 vol. in-8.
Le guide de ceux qui veulent bâtir, par le Camus de Mézières, 2 vol. in-8.
Pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres, de Desargues, par Bosse, in-8.
Élémens d'Architecture, de Fortification et de Navigation, 1 vol. in-8.
Livre de divers Dessins d'ornemens, gravés par Balechou, 1 vol. in-fol. rel.
Recueil de différentes planches d'Architecture, 2 vol. in-fol.
Mémoire sur les travaux d'exploitation de la Mâture dans les Pyrénées, par le Roy, 1 vol. in-4., pl.
Détails des ouvrages de Menuiserie, par Potain, in-8.
Moyens de préserver les édifices d'incendies, et d'empêcher le progrès des flammes, par Piroux, 1 vol. in-8.
Théorie des Machines mues par la force de la vapeur de l'eau, in-8.
Manière de rendre les édifices incombustibles, 1 vol. in-12.
Mémoire sur les moyens de construire en bois, avec plus de solidité et d'économie, par Panseron, 1 vol. in-4., 1786.
Architecture de Palladio, par Scamozzi, en italien, 4 vol. in-fol. Vicenza, 1786.
Architecture de Palladio, avec les notes d'Inigo Jones, 2 vol. in-fol. rel.
Œuvres d'Architecture, de J. Lepautre, 3 vol. in-fol. rel., 147 pl.
— Le même, grand papier.
Architetture, e prospettive dà Bibiena, gr. in-fol. rel., 50 pl.
Œuvres d'Architecture d'Antoine le Pautre, 1 vol. in-fol., 60 pl.
[illegible] *parallèle des édifices anciens et modernes*, par M. Durand, [illegible] Paris, 1 vol. in-fol., 86 pl. 180 fr.

.es de Pæstum. — De Palmyre. — De Balbeck. — Ioniennes, in fol.
.ces antiques de Rome, par Desgodetz, 1 vol. in-fol., 14[illegible] pl.
.es des plus beaux monumens de la Grèce, par Leroy, in-fol., 61 pl.
plus beaux monumens de Rome ancienne, par Barbault, 1 vol. in-fol., 28 pl.
plus beaux édifices de Rome moderne, par Barbault, 1 vol. in-fol., [illegible] pl.
a Sotterranea. in-fol. [illegible] pl.
tails intéressans de la Basilique de Saint-Pierre de Rome. Dumont, 1 vol. in-fol., 6[illegible] pl.
ta di Architettura antiche moderne della città di Firenze, 1755, fol., pl.
s, élévations, sections ... of Buildings, executed in the counties of Norfolk, Suffolk, ... [illegible]
res d'Architecture de ... [illegible], 1 vol. in-fol., 74 pl.
rages d'Architecture de ... [illegible]
uvius Britannicus, [illegible]
Vitruve danois, contenant les plans, les élévations, les profils des principaux bâtimens du royaume de Danemarck, et des provinces allemandes qui en dépendent, [illegible], avec beaucoup de planches.
s et dessins d'édifices exécutés ou projetés, [illegible] pl. Sungalli, in-fol., figures.
egni del Palazzo di Caserta, [illegible] in-fol., 14[illegible]
i sur l'art de construire les Théâtres, leurs machines et leurs mouvemens, par Boullet, 1 vol. in-4., 13 pl.
l'Architecture, par Scott, 1 vol. in-[illegible].
osition des principes de l'ordonnance des Théâtres, 1 vol. in-12.
Teatro Olimpico di Palladio in Vicenza, 1 vol. in-4.
cription du Théâtre de la ville de Vicence, chef-d'œuvre de Palladio, vol. in-8., 4[illegible] pl.
llèle de plans des plus belles salles de spectacles d'Italie et de France. umont, in-fol., pl.
de spectacle de Bordeaux, avec le plan, sur la même échelle, des héâtres modernes les plus connus, 1 vol. grand in-fol., 22 pl.
oire sur la Colonne de la Halle aux Blés, 1 vol. in-8.
quités de la France. Clérisseau, in-fol.
is sur les moyens d'opérer la restauration des supports du dôme du nthéon. Gisors, in-4.
cipes de l'ordonnance et de la construction des bâtimens, avec des cherches sur le Pont de Paris, construit par Perronet, et sur le temple evé par Soufflot, 1 vol. in-4., par Viel.
oire sur la construction de la Coupole du Panthéon, [illegible]
té élémentaire de la construction des Vaisseaux, par Vial du Clairbois, vol. in-4., 20 pl.
té du Navire, de sa construction et de ses mouvemens, par Bouguer, vol. in-4., 12 pl.
Manœuvre des Vaisseaux, ou Traité de Mécanique et de Dynamique, par Bouguer, 1 vol. in-4., 15 pl.

ité élémentaire de la Mâture des Vaisseaux, par Forfait, 1 vol. in-4, 24 pl.

Et autres bons Livres d'Arts, de Mécanique et d'Architecture.

ARTICLES DIVERS.

HÉORIE DE L'IMAGINATION, par *Pouilly*, 1 vol. in-12, 1 f. 50 c. pour Paris, 3 f. 50 c. franc de port, 5 f. pap. vélin.

Depuis Mallebranche, on n'a rien écrit de plus ingénieux ni de plus élégant sur la nature et le pouvoir d'une enchanteresse qui fait le tourment et le bonheur de l'homme. Cet ouvrage est digne du fils de l'auteur célèbre de la *Théorie des sentimens agréables*.

OURS DE MORALE, destiné aux jeunes demoiselles, 2 vol. in-12, par *Amalric*; 4 f. pour Paris, 5 f. franc de port, 6 f. pap. vélin.

Ce livre manquoit à nos familles et aux institutrices. Il renferme les principes généraux de la morale, et on y trouve leur application spéciale aux devoirs des jeunes personnes. Les préceptes touchans de Fénélon, la morale douce de madame de Lambert, les oracles de la sagesse de tous les temps, y offrent à la jeunesse ses devoirs envers Dieu, envers elle-même, envers ses parens, ses supérieurs et ses inférieurs.

ŒUVRES COMPLÈTES DE MONTESQUIEU, 5 vol. in-4. grand raisin, pap. vél., caractères de Didot; avec 2 cartes gravées par Tardieu, et 14 fig., par *Tardieu*, *Moreau*, *Peyron*, *Perrin*, *Vernet* et *Chaudet*.

« Cette édition, a dit un journaliste, est une des plus belles productions de la librairie moderne; elle est digne de Montesquieu et de la nation française. Elle renferme les Œuvres posthumes de ce grand homme, sa Dissertation sur la politique des Romains dans la religion; les Portraits des grands hommes de France; l'Éloge du duc de la Force, celui du duc de Berwick; le Plan d'une Histoire physique de la terre, le Parallèle des Anglais et des Français; divers morceaux très-piquans, et l'Analyse raisonnée de l'Esprit des Lois, par *Bertolini*, très-rare, très-estimée de Montesquieu lui-même, et faite pour être mise en parallèle avec celle de d'Alembert ».

Cette édition a été tirée seulement à 500 exemplaires sur papier vélin, figures *avec* la lettre, et à 50 exemplaires figures *avant* la lettre. Il n'y a pas eu d'exemplaires sur papier ordinaire. L'exemplaire des figures *avant la lettre*, 300 f.; celui *avec la lettre*, 150 f.

L'exemplaire le plus précieux, exemplaire *unique* et digne des amateurs distingués, est celui qui contient les *dessins originaux* de tous les artistes célèbres qui ont embelli cette magnifique entreprise. Il renferme aussi les *eaux fortes*, les figures *avant la lettre*, et les figures *avec la lettre*. Son format est plus grand que celui de l'édition in-4. Il est satiné.

Le *Temple de Gnide*, avec *Céphise* et *Arsace*, in-4., veau f., tr. dor., édition de Didot, figures de l'édition ci-dessus, et le portrait de Montesquieu, par Tardieu (exemplaire rare).

ŒUVRES POSTHUMES DE MONTESQUIEU, contenant les manuscrits inédits de l'édition, in-4. 1 vol. in-8. 4 f.

— *Idem*, 1 vol. in-12. 3 f.

[illegible] copperiâtres.

[illegible]

[illegible]

[illegible] Virgile [illegible]

Le [illegible] pour l'intelligence du texte.

[illegible]RÉGÉ DE L'HISTOIRE DE LA GRÈCE, depuis son origine [illegible] jusqu'à ce jour, [illegible] vol. in-8. Pour Paris [illegible]

[illegible] la description de [illegible] des colonies, les expéditions [illegible] [illegible] de Sparte [illegible] avec [illegible] tableaux [illegible] l'histoire de la Grèce, [illegible] les noms des hommes célèbres de la Grèce [illegible] la partie historique [illegible] de la partie philosophique [illegible] les mœurs et les usages, les sciences et les arts [illegible] l'agriculture, le commerce, les finances [illegible] des Gouvernemens [illegible] de la Grèce. [illegible] des hommes célèbres [illegible] avec la bibliographie des auteurs grecs [illegible] et économique de la foule des bons livres qu'on a écrits depuis [illegible] ans sur la Grèce.

[illegible]RT DE PARLER ET D'ÉCRIRE CORRECTEMENT LA LAN[illegible]GUE FRANÇAISE, ou Grammaire philosophique et littéraire de cette langue, par Lévisac, 2 vol. in-8°. troisième édition. [illegible]

[illegible]isième supplément au Dictionnaire historique, tome 9 des éditions de [illegible]786 et 1789, et éditions précédentes, in-8. [illegible]

LANGUE DES CALCULS, par *Condillac*, 1 vol. in 8. [illegible]

DIS DE M. SERVAN, EX-MAGISTRAT, SUR LA
P

H OIRE DES GUERRES DES GAULOIS ET DES FRA
EN ALIE, *depuis Bellovèse, en 591, avant l'ère vulgair qu'au traité de paix d'Amiens, en 1802; avec le Tableau des évé civils et militaires qui les accompagnèrent, et leur influence sur la sation et les progrès de l'esprit humain*, dédiée et présentée à S. M pereur et Roi d'Italie, par *Joseph Servan*, général de divisi sept volumes in-8°. avec le *Portrait* de Napoléon, et un *atlas* sur papier jésus.

Le *Portrait*, qui est à la tête du livre, a été dessiné par *Isabey*, par *Alex. Tardieu;* il est le plus ressemblant.

Le *premier* volume contient les guerres depuis l'irruption de Bel chef des Gaulois, en Italie, l'an 591 avant l'ère vulgaire, jusqu'à la Louis XII, en 1515. Cette période offre le berceau de Rome et des empires, leurs progrès, leur gloire, leur décadence. Les Gaules par les Français, originaires des bords de la Vistule, perdent leur prennent celui de France. Les passages des Alpes par les armées d' et de Charlemagne, ne laissent aucunes traces à la postérité. Mais l verte d'un nouveau monde par la boussole, l'invention de la poudre la renaissance des lettres, l'origine de l'art typographique les gue cessives de Charles VIII en Italie, les conquêtes du Milanais par L l'évacuation de Naples par les Français, tout présente dans cet inte temps, de grandes méditations à l'homme d'Etat, au militaire, à l'ob attentif. Ce volume renferme des *notes* intéressantes sur la poudre les divers passages des Alpes, les enseignes militaires, les progrè mières et des arts; il est de l'ex-adjudant général *Jubé*.

Dans le *second* volume, on parcourt tous les événemens depuis ment de François I^er^. au trône, en 1515, jusqu'à la mort de Hen 1610. Le seizième siècle présente un état précis de la civilisation d les prétentions de François I^er^. sur le Milanais, la bataille de Mari prise de Brescia, le siége de Véronne, le traité de Fribourg, les e Lautrec, les événemens politiques qui accompagnèrent les opinions r de Luther, les malheurs de François I^er^. à Pavie, la paix de C l'assassinat de Merveille, l'entrée des Français dans le Piémont, l de Cérisoles, l'ambition de Charles-Quint, la bataille de Murianc d'Yvrée et de Casal, la reddition de Turin au duc de Savoie, la Henri IV.

Le *troisième* volume renferme tous les événemens depuis 1610 mort de Louis XV, en 1774. L'abondance des matières a contr couper en deux parties ou en deux tomes: la *première partie* tous les faits depuis la mort de Henri IV jusqu'à la mort de Lo en 1715; l'entrée de Richelieu à Suze, la conquête de la Savoie, militaires du maréchal de Créqui, les campagnes du duc de Roh Valteline, la victoire des Français sur les bords du Tesin, le co ment du cardinal de la Valette, le combat de Quiers, la prise de ortone par les Français, le tableau du monde à cette époq. ne, lat, Eugène, Villeroy, Vendôme, Médavi, fixent l'a. vol. sur le. La paix d'Utrecht termine ce tableau intéressant pour li-, pour les observateurs.—Dans la *secondepartie*, on voit l guerre u- par la mort de l'empereur Charles VI. Le prince de Conti co nde les les françaises en Italie; les passages des Alpes sont forcés; le si e de ouvre la campagne. M. de Maillebois remplace le prince de Conti; il emplacé à son tour par M. de Belle-Isle. Coigny et Broglie battent les riaux. Tous les événemens qui agitent l'Europe se terminent par un de paix signé en 1763. La Corse est réunie à la France. La mort ouis XV est suivie du tableau de l'univers à la fin du 17e. siècle.

e *quatrième* volume offre également deux parties ou deux tomes : il rasse depuis 1774 jusqu'en 1797 ; mais la *première partie* présente que célèbre du berceau de la révolution française. La *seconde partie* mence à 1797, et finit au traité de paix conclu à Campo-Formio.

e *cinquième* volume contient tous les événemens civils, politiques et taires, depuis le 17 octobre 1797 jusqu'au 25 mars 1802; c'est-à-dire, uis le traité de paix de Campo-Formio, jusqu'au traité de paix signé à iens. Les *notes* contiennent un état exact et détaillé de tous les objets de nces et arts conquis en Italie par les Français. Il a été communiqué par *Denon*, directeur du Musée Napoléon.

ATLAS.

l a été dressé par M. *Lapie*, capitaine, ingénieur-géographe, employé lépôt général de la guerre, d'après les matériaux les plus précieux et jétis aux observations astronomiques les plus récentes. La gravure fait neur au talent de Fr. *Tardieu*. Il comprend *douze* cartes.

Cartes : celle des *Gaules*, d'après Danville, avec les noms modernes ôté des Latins; une carte *comparative* des divisions anciennes et des lernes de la France; une carte générale de l'Italie *ancienne*, avec les ns anciens et les noms modernes; les 4e, 5e, 6e, 7e, sont les cartes aillées des différentes parties de l'Italie; les 8e. 9e, 10e. 11e, tracent divers passages des Alpes, par Annibal, François Ier, Charlemagne, naparte; les sabres *renversés* y désignent les batailles perdues, les sa- s *élevés*, les victoires, les sabres *isolés*, les combats; la 12e carte ésente la campagne de *l'Armée de réserve*, commandée par Bonaparte, mier Consul, avec ses marches, ses positions, ses combats, deux ordres bataille, et une Légende historique, qui présente l'explication des détails cette carte enluminée.

Les deux *vues* représentent, l'une, le premier Consul *descendant le* and *Saint-Bernard*, avec toute son armée; l'autre, *la Bataille de arengo.*

Prix de l'édition in-8°.

Les sept volumes in-octavo, sur *beau papier*, avec le portrait de S. M. I., *brochés*, et l'atlas in-folio, jésus, *cartonné*, pour Paris.. 67 f

L'exemplaire sur *papier vélin*, avec le portrait, *broché*, avec l'atlas sur papier raisin vélin double. Pour Paris.............. 130 f

L'exemplaire, sur *papier vélin*, avec le portrait, *broché*, et avec l'atlas, sur du papier *colombier vélin*, pour Paris............. 150 f

Prix de l'atlas.

L'atlas, séparément, *cartonné*, *pour Paris*, 31 f

Il est bien moins coûteux que les cartes seules de Zannoni, ni de Bac d'Albe, et notre atlas comprend tous les rapports de la France avec l'Ital

Prix de l'édition in-12.

HISTOIRE DES GUERRES DES FRANÇAIS EN ITALIE, en 6 vol. in-12, avec *quatre cartes* du théâtre de la guerre; ils contiennent les événemens civils, politiques et militaires depuis 1774, jusqu'au traité de paix signé à Amiens, en 1802, qui sont dans les trois derniers volumes in-8. Ils sont utiles et agréables aux militaires, aux lycées, à l'instruction de la jeunesse française. Prix, pour Paris, des 6 vol. brochés, avec les quatre cartes désignées sous les numéros 8, 9, 10, 11, dans l'atlas (*voyez* ci-contre). 15

Manuel du commerce des Indes et de la Chine, par *Blancard*, anc Navigateur, Membre du conseil du Commerce de la ville de Marse 1 vol. in-4° avec une carte hydrographique nouvelle, dressée M. Lapie, ingénieur. Prix, pour Paris. 2

Dictionnaire Suisse, 2 vol. in-4.

Dictionnaire espagnol, Sobrino, 2 vol. in-4. rel.

Apollonii Sophistæ Lexicon græcum, 2 vol. in-4. Villoison.

Observations sur l'Italie, 5 vol. in-12.

Monde primitif, par Court de Gébelin.

Dictionnaire Hollandais et Français, 2 vol. gr. in-8.

Dictionnaire de la Langue Française. Féraud, 3 vol. in-4.

Dictionnaire Français, Allemand et Russe, 2 vol. in-4.

Alphabetum Tironianum, in-fol.

Dictionnaire Allemand et Français, Français et Allemand, par Schv 6 vol. in-4, rel.

Le même, en 2 vol. in-4.

Vocabolario della Crusca, 5 vol. in-4.

Philostratorum quæ supersunt omnia. Leips. 1709, in-fol. vél.

Aristophanis comœdiæ cum notis Bergleri et Dukeri, édit. Burmai in-4, vélin.

Q. Curtius, cum notis Sam. Pitisci, 2 vol. in-8, cartes.

Justi Lipsi Opera, 4 vol. in-8.

bonis rerum Geographicarum libri 17. Amstelod. 1707, 2 vol. in-fol. aroq. tr. dor.
creontis odaria. Parmæ, in-4, maroq. t. dor. = Secundi Plinii Opera, volumes maroq.
tius de jure et pace. Amstel. in-8.
æi sententiæ, 2 vol. in-12 mar
relii Taciti op. Glascuæ, 4 vol. in 12. — *Id.* 3 vol. Barbou. *Id.* 2 vol. ackii = Titi Livii Opera, 4 vol. mar. — *Id.* 5 vol. mar.
gilii Opera. Burmann, 2 vol. in-4, maroq.
gile, traduit de Desfontaines, 4 vol. in-4, fig. de Moreau, pap. vél.
iaux ou Contes des XII^e et XIII^e siècles, 4 vol. in-8.
e, trad. 3 vol. in-4. rel.
es de la Fontaine, 2 vol. in-fol. fig. Oudry.
re de Pope, 8 vol. in-8.
re de Mde. Riccoboni, 8 vol. in-8, rel.
oire Universelle, par une Société de gens de lettres, 126 vol. in-8, rel.
oire Romaine. Ferguson., 7 vol. in-8.
eil de cent Estampes représentant différentes nations du Levant, -folio, relié.
ection d'Anecdotes, des Beaux Arts, Françaises, Ecclésiastiques, épublicaines, Chinoises, Germaniques, Italiennes, Américaines, du ord, Espagnoles, Arabes, 19 vol. rel.
age Pittoresque de Sicile de Lipari et de Malthe, p. J. Houel, 4 v. in-fol.
oire d'Angleterre. Hume, 18 vol. in-12, relié.
oire de la Rebellion et des Guerres civiles d'Angleterre, depuis 1641, squ'à Charles II. Clarendon, 6 vol. in-12.
oire des Grands Chemins de l'Empire Romain. Bergier, 2 vol. in-4.
hode pour étudier la Géographie et l'Histoire. Lenglet-Dufresnoy, 5 vol. reliés.
ageur Français, Laporte, 42 vol. in-12.
oire Universelle de Bossuet. Didot, 2 vol. in-8 (rare).
nême vol. in-12 (rare). Didot.
res de Boileau, 2 vol. in-12. Didot (rare).
ueil de Contes et Nouvelles en vers, avec vignettes, 4 vol. in-12, rel.
vres de J. Bte. Rousseau, 4 vol. in-8.
salemme liberata, 2 vol. in-4, p. v. mar. fig.
ces des Écoles Normales, 11 vol. in-8.
res de Mably.
res de Condillac.
res de J.-J. Rousseau, édition de Lyon, 33 vol. in-8.
osa. Tractatus Théologico-Politicus de libertate. = Ejusd. Opera sthuma, 2 vol. in-4, mar. tr. dor.
res et Mémoires de St.-Évremont, 8 vol. in-12, rel.
s de Montaigne, 3 vol. in-8.
res de Rabelais, 5 vol.
es de M. Dargens.